Probabilités, M1, novembre 2008.

Conventions et rappels

– Si A est une v.a. à valeurs entières, on notera ϕ_A sa fonction génératrice. C'est la fonction de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\phi_A(u) = E(u^A)$.

– Si X, Y et Z sont trois v.a. réelles, si X et Y sont intégrables, alors :

$$E(X+Y|Z) = E(X|Z) + E(Y|Z).$$

– Dire qu'une v.a. X suit une loi géométrique de paramètre $0 < p < 1$ signifie que X prend ses valeurs dans $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ et que, pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ on a

$$P(X = k) = p(1-p)^{k-1}.$$

Exercice 1 (Galton-Watson) : Soit $(X_{n,p})_{n\geq 0, p\geq 1}$ une famille de v.a.i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}$. Soit X une v.a. de même loi que chacune des $X_{n,p}$.

On pose $Z_0 = 1$ et, pour tout entier $n \geq 0$:

$$Z_{n+1} = X_{n,1} + \cdots + X_{n,Z_n}.$$

(Si $Z_n = 0$, on pose $Z_{n+1} = 0$.)

1. On suppose dans cette question que X est à valeurs dans $\{0, 1, \ldots, 10\}$. Soit $n \geq 0$ un entier.
   (a) Exprimer $E(u^{Z_{n+1}}|Z_n)$ en fonction de Z_n et de ϕ_X, la fonction génératrice de X.
   (b) En déduire une expression de $\phi_{Z_{n+1}}$, la fonction génératrice de Z_{n+1}, en fonction ϕ_{Z_n} et ϕ_X.
   (c) En déduire une expression de ϕ_{Z_n} en fonction de n et de ϕ_X.
   (d) Si au lieu de supposer $Z_0 = 1$ on avait supposé $Z_0 = 2$, quelle aurait été l'expression de ϕ_{Z_n} ? On suppose à nouveau $Z_0 = 1$ dans la suite.
2. On suppose dans cette question que X suit une loi géométrique de paramètre $0 < p < 1$. L'objectif est de déterminer la loi de Z_n pour tout n. On admet que les résultats obtenus dans la question 1 restent vrais dans ce cadre. On *propose* la démarche suivante, dans laquelle ψ_a désigne la fonction génératrice d'une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre $a > 0$.
   (a) Expliciter ψ_a pour tout $0 < a < 1$.
   (b) Soient $0 < a, b < 1$. Trouver $0 < c < 1$ tel que $\psi_a \circ \psi_b = \psi_c$.
   (c) Conclure grâce à la question 1.

Exercice 2 : Soit (X, Y) une v.a. de loi uniforme sur le carré C de $\mathbb{R}^2$ de sommets $(-1, 0)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$ et $(0, 1)$. Les v.a. X et Y sont-elles indépendantes ? Démontrer votre affirmation. (Au besoin, on pourra admettre quelques évidences géométriques.)

Exercice 3 : Soit (X, Y) une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. On suppose que la loi de (X, Y) admet pour densité la fonction f définie par :

$$f(x, y) = (x + y)1_{[0,1]^2}(x, y).$$

1. Donner la densité f_X de la loi de X.
2. Donner la famille des lois de Y sachant X.
3. Donner $E(Y|X)$.
4. Donner la densité de la loi de $X+Y$.

Exercice 4 : Soient X, Y et Z trois v.a. indépendantes et de loi uniforme sur $[0,1]$. On pose $A = \cos(2\pi X)(Y+Z)^2 Z$.

1. Donner $E(A|X)$.
2. Donner $E(A|Y)$.
3. Donner $E(A|Z)$.
4. Donner $E(A)$.

Exercice 5 : On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des intervalles de $\mathbb{R}$ de la forme $]-\infty, x[$, $x \in \mathbb{R}$. Quelle est la tribu engendrée par $\mathcal{A}$? Démontrer ce résultat. Quelle est la tribu engendrée par $\mathcal{A}'$, l'ensemble des intervalles de $\mathbb{R}$ de la forme $]-\infty, x[$, $x \in \mathbb{Q}$?