Examen - Probabilités
M1 - 2008-2009 - Session 2

Exercice 1 : Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de loi uniforme sur le triangle de sommets $(-1, 0), (1, 0)$ et $(0, 1)$.

1. Donner la densité f_Y de la loi de Y.
2. Donner la famille des lois de X sachant Y.
3. Donner $E(X|Y)$.
4. Donner $E(X^2|Y)$.

Exercice 2 : On pose

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

1. Montrer que K est une matrice symétrique positive. On note dans la suite (X, Y, Z) un vecteur aléatoire gaussien centré de matrice de covariance K.
2. Quelle est la loi de la variable aléatoire $X + 2Y$?
3. Quelle est la loi du vecteur aléatoire $(X + Y, Z)$?
4. À quelle condition sur $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ le vecteur aléatoire $aX + bY + cZ$ est-il nul avec probabilité 1 ?
5. En déduire que (X, Y, Z) appartient avec probabilité 1 à un plan que l'on précisera.
6. Montrer qu'il existe un unique réel b tel que $X + bY$ et X soient indépendants.
7. En déduire $E(Y|X)$.

Exercice 3 : On fixe un entier $d \geq 2$. Soit $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\{1, \ldots, d\}$. On suppose qu'elles sont indépendantes et de même loi. Pour tout entier $n \geq 1$ et tout entier $i \in \{1, \ldots, d\}$ on pose :

$$N_n(i) = \text{card}(\{k \in \{1, \ldots, n\} : X_k = i\}).$$

Pour tout vecteur q de $\mathbb{R}^d$ à coordonnées strictement positives, on pose :

$$D_n(q) = \sum_i \frac{(N_n(i) - nq_i)^2}{nq_i}$$

Enfin, on définit un vecteur p de $\mathbb{R}^d$ en posant, pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$, $p_i = P(X_1 = i)$. On suppose que tous les p_i sont strictement positifs. On rappelle le résultat suivant :
Théorème *Pour tout réel a, on a*

$$P(D_n(p) \leq a) \to P(Z \leq a)$$

où Z est une variable aléatoire suivant une loi du χ^2 à $d - 1$ degrés de liberté [1]

[1] La loi du χ^2 à $d - 1$ degrés de libertés est la loi de la somme des carrés de $d - 1$ gaussiennes indépendantes centrées et de variance 1

1. Rappeler en moins d'une demi-page les idées de la preuve de ce théorème.
2. Comment se comporte la suite $(D_n(q))_{n\geq 1}$ si q est différent de p ?
3. On se donne un échantillon $x_1, \ldots, x_n \in \{1, \ldots, d\}$ issu de variables aléatoires de loi P (inconnue). On se donne une mesure de probabilité Q sur $\{1, \ldots, d\}$. Décrire un test statistique permettant de déterminer si l'hypothèse $P = Q$ est plausible.

Exercice 4 : Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On suppose, pour tout $n \geq 1$:

$$P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \frac{1}{2}.$$

On pose, pour tout $n \geq 1$:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

Enfin, pour tout réel u, on pose :

$$f(u) = E(\exp(uX_1)).$$

L'objectif de cet exercice est d'établir le résultat suivant : pour tout $\beta > 1/2$, on a, avec probabilité 1 :

$$\lim \frac{S_n}{n^\beta} = 0.$$

1. Soit Y une variable aléatoire. Soient a et u deux réels strictement positifs. Établir l'inégalité suivante :
$$P(Y \geq a) \leq E(\exp(u(Y - a))).$$
2. En déduire, pour tout entier $n \geq 1$, l'inégalité suivante :
$$P(S_n \geq a) \leq f(u)^n \exp(-ua).$$
3. Expliciter la quantité $f(u)$.
4. Établir l'inégalité suivante :
$$f(u) \leq \exp(u^2/2).$$
(On pourra utiliser un développement en série entière.)
5. En déduire :
$$P(S_n \geq a) \leq \exp\left(\frac{nu^2}{2} - ua\right).$$
6. En déduire :
$$P(S_n \geq a) \leq \exp\left(-\frac{a^2}{2n}\right).$$
7. En déduire :
$$P(|S_n| \geq a) \leq 2\exp\left(-\frac{a^2}{2n}\right).$$
8. En déduire que, pout tout ε et tout $\beta > 1/2$, avec probabilité 1, pour n assez grand, on a $|S_n| < \varepsilon n^\beta$. On rappelle pour cela le résultat suivant. Si une suite d'évènements $(A_n)_{n\geq 1}$ vérifie $\sum_n P(A_n) < \infty$ alors, avec probabilité 1, pour n assez grand, l'évènement A_n n'est pas réalisé.
9. Conclure.