Probabilités et statistiques
M1 - 2008-2009

Exercice 1 : On pose

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

1. Montrer que K est une matrice symétrique positive. On note dans la suite (X, Y, Z) un vecteur aléatoire gaussien centré de matrice de covariance K.
2. Quelle est la loi de la variable aléatoire $X + Y + Z$?
3. Quelle est la loi du vecteur aléatoire $(X + Y, Y + Z)$?
4. À quelle condition sur $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ le vecteur aléatoire $aX + bY + cZ$ est-il nul avec probabilité 1 ?
5. En déduire que (X, Y, Z) appartient avec probabilité 1 à un plan que l'on précisera.
6. Montrer qu'il existe un unique réel b tel que $X + bY$ et X soient indépendants.
7. En déduire $E(Y|X)$.

Exercice 2 : On rappelle la définition de la loi de Student.

Définition (loi de Student) *La loi de Student à n degrés de libertés est la loi de*

$$\frac{Z_0}{\sqrt{(Z_1^2 + \cdots + Z_n^2)/n}}$$

où les Z_i sont des variables aléatoires gaussiennes centrées réduites et indépendantes.

On rappelle également le résultat suivant.

Théorème (Fisher) *Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes et de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ où m est un réel et σ un réel strictement positif. Soit q un réel. On pose :*

$$T_n^q = \sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - q}{S_n}$$

où

$$\overline{X}_n = n^{-1} \sum_{k \leq n} X_k \text{ et } S_n = \sqrt{(n-1)^{-1} \sum_{k \leq n} (X_k - \overline{X}_n)^2}$$

Si $q = m$ alors T_n suit la loi de Student à $n - 1$ degrés de liberté.

On rappelle enfin que, sous les hypothèses du théorème, S_n converge avec probabilité 1 vers σ.

Soit $x_1, \ldots, x_n$ un échantillon issu de variables aléatoires de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ où m est un réel et σ un réel strictement positif (tous deux inconnus). Décrire un test statistique permettant de déterminer si l'hypothèse $m = 2$ est plausible. Décrire un test pour l'hypothèse $m \geq 2$.

Exercice 3 (Test de Kolmogorov-Smirnov) : Soit X une variable aléatoire réelle dont la loi admet une densité. On note μ sa loi. On note F sa fonction de répartition. C'est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$ définie par

$$F(x) = P(X \leq x).$$

Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi (qui n'est pas nécessairement la loi μ). Pour tout entier $n \geq 1$, on note F_n la fonction de répartition empirique des n premières variables. C'est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$ définie par

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\mathrm{card}(\{k \leq n : X_k \leq x\}).$$

On pose enfin, pour tout entier $n \geq 1$:

$$D_n = \sqrt{n}\|F_n - F\|_\infty = \sqrt{n}\sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)|.$$

On admet le résultat suivant.

Théorème (Kolmogorov-Smirnov) *Si la loi commune des X_k est μ alors, pour tout réel c, on a :*

$$\lim_{n\to\infty} P(D_n > c) = P(K > c)$$

où K est une variable aléatoire suivant la loi de Kolmogorov-Smirnov (loi qui est connue explicitement).

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Utiliser la loi des grands nombres pour établir que la convergence suivante a lieu avec probabilité 1 :

   $$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = P(X_1 \leq x).$$

   Indication : écrire pour cela $F_n(x)$ comme le produit de n^{-1} par une somme pertinente.
2. On suppose dans cette question que la loi commune des X_k n'est pas μ. Déduire de ce qui précède que D_n converge avec probabilité 1 vers l'infini.
3. Utiliser ce qui précède et le théorème de Kolmogorov Smirnov pour construire un test statistique permettant de déterminer si un échantillon $x_1, \ldots, x_n$ est issu de variables aléatoires suivant la loi μ.

Exercice 4 : Soient X, Y, Z trois variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[-1, 1]$. On pose $A = X^2(X+Y)\exp(Z)$.

1. Calculer $E(A|X)$.
2. Calculer $E(A|Y)$.
3. Calculer $E(A|Z)$.
4. Calculer $E(A)$.

Exercice 5 : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$. Que vaut $P(X = Y)$?

Exercice 6 : Soit X et Y deux variables aléatoires positives et intégrables sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Soit $\mathcal{G}$ une tribu incluse dans $\mathcal{F}$. Soit $A \in \mathcal{G}$. On suppose que les restrictions de X et Y à A coïncident. Montrer que les restrictions de $E(X|\mathcal{G})$ et $E(Y|\mathcal{G})$ à A coîncident également.