Probabilités et statistiques
M1 - 2008-2009
Corrigé succinct, partiel et sans garantie

Exercice 1 : Voir les TD pour les premières questions.

5. Comme $(X+bY, X)$ est un vecteur gaussien, ses deux marginales sont indépendantes si et seulement si leur covariance est nulle. Cela équivaut donc à $1+b=0$. Le seul réel satisfaisant la condition requise est donc $b=-1$.
6. On en déduit $E(Y|X)$ en écrivant $Y=-(X-Y)+X$. L'indépendance de $X-Y$ et de X donne en effet $E(X-Y|X)=E(X-Y)$ qui est nulle car le vecteur gaussien est centré. Ainsi, $E(Y|X)=-E(X-Y|X)+E(X|X)=X$.

Exercice 2 : Voir le cours.

Exercice 3 (Test de Kolmogorov-Smirnov) :

1. Remarquons :
$$F_n(x) = n^{-1}\sum_{k=1}^{n} 1_{]-\infty,x]}(X_k).$$
Comme $(1_{]-\infty,x]}(X_k))$ est une suite de v.a.i.i.d. intégrables, la loi des grands nombres donne la convergence avec probabilité 1 de $F_n(x)$ vers l'espérance de $1_{]-\infty,x]}(X_1)$ i.e. vers $P(X_1 \leq x)$.
2. Comme la loi commune des X_k n'est pas μ, il existe un réel x tel que $P(X_1 \leq x) \neq F(x)$. On fixe un tel x. Par la question précédente, on a la convergence avec probabilité 1 de $F_n(x)$ vers $P(X_1 \leq x)$. Ainsi, avec probabilité 1, $F_n(x)-F(x)$ converge vers une quantité non nulle. Par conséquent, avec probabilité 1, $\sqrt{n}|F_n(x)-F(x)|$ converge vers l'infini. On en déduit le résultat.
3. L'hypothèse que nous testons est l'égalité de la loi commune des X_k et de la loi μ. Par le théorème de Kolmogorov-Smirnov et par le résultat de la question précédente, on a les comportements suivants :
   - Si l'hypothèse est vraie, alors, pour tout c, $P(D_n > c)$ converge vers $P(K > c)$;
   - Si l'hypothèse est fausse, alors D_n converge avec probabilité 1 vers l'infini.

   Cela nous amène à considérer le test suivant. On calcule D_n à partir de notre échantillon et de la loi μ. Si la valeur est grande, on rejette l'hypothèse ; sinon, on l'accepte. Il reste à quantifier la phrase "D_n est grand". On fixe pour cela un seuil α pour l'erreur de première espèce de notre test. On déterminer ensuite le réel λ tel que $P(K > \lambda) = \alpha$. Notre test est alors :
   - Si $D_n > \lambda$, on rejette l'hypothèse (on rejette ainsi par erreur avec probabilité proche de $P(K > \lambda) = \alpha$) ;
   - Sinon, on accepte.

Exercice 4 : Voir la correction du partiel.

Exercice 5 : Notons Δ la diagonale de $\mathbb{R}^2$: $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$. On a :

$$\begin{aligned}
P(X=Y) &= E(1_\Delta(X,Y)) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} 1_\Delta P_{(X,Y)}(dx,dy) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} 1_\Delta P_X(dx) \right) P_Y(dy) \text{ par indépendance de } X \text{ et de } Y \text{ et par Fubini} \\
&= \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} 1_\Delta dx \right) dy \text{ car } X \text{ et } Y \text{ sont uniformes sur} [0,1].
\end{aligned}$$

Mais, pour tout y de $[0,1]$, la fonction de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $x \mapsto 1_\Delta(x,y)$ est nulle sauf en un point. Son intégrale contre la mesure de Lebesgue est donc nulle. Ainsi,

$$P(X=Y) = \int_{[0,1]} 0 dy = 0.$$

Exercice 6 : On a $X1_A = Y1_A$. On a donc $E(X1_A|\mathcal{G}) = E(Y1_A|\mathcal{G})$. Mais comme A appartient à $\mathcal{G}$, on a $E(X1_A|\mathcal{G}) = E(X|\mathcal{G})1_A$. On a de même $E(Y1_A|\mathcal{G}) = E(Y|\mathcal{G})1_A$. On a donc finalement $E(X|\mathcal{G})1_A = E(Y|\mathcal{G})$, ce qui donne le résultat demandé.