Modes de convergence

7 mars 2011 - v1 non débuguée
8 septembre 2013 - v2 non débuguée

1 Définitions

Cadre Une suite de v.a. réelles $(X_n)_n$. Une v.a. X réelle. Toutes les v.a. sont définies sur le même espace.

1.1 Convergence p.s.

1. Définition.
2. Questions de mesurabilités.

1.2 Convergence en probabilité

1.3 Convergence L^p.

(On suppose que tout le monde est dans L^p.)

1.4 Convergence en loi

Définitions équivalentes :

1. Formulation avec les fonctions continues bornées.
2. Formulation avec les fonctions continues à support compact.
3. Formulation avec les fonctions de répartition (convergence en tout point de continuité de la fonction de répartition de X).
4. Formulation avec les transformées de Fourier.
5. Formulation avec l'existence de réalisations des v.a. telles que l'on ait convergence simple. Cela peut se montrer en utilisant la réalisation d'une v.a. par inversion de la fonction de répartition [1].

1. Soit $G :]0,1[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$G(u) = \sup\{x : F_X(x) < u\}$$

où F_X est la fonction de répartition de X. Pour tout réel x on a :

$$\{u : G(u) \leq x\} = \{u : u \leq F_X(x)\}.$$

Remarque. Cas de v.a. à valeurs dans $\mathbb{Z}$ (équivalence avec $P(X_n = k) \to P(X = k)$ pour tout k ; ce n'est pas vrai si on remplace $\mathbb{Z}$ par un ensemble dénombrable quelconque : considérer par exemple $\{1/n, n \geq 1\} \cup \{0\}$ et $X_n = 1/n$).

C'est une propriétés des mesures. Le fait que les v.a. soient ou non réalisées sur le même espace n'est pas pertinent. Equivalence avec l'existence de réalisations de ces v.a. sur un même espace pour lesquelles on a convergence simple (par inversion des fonctions de répartitions).

Dans le même ordre d'idée, il n'y a pas unicité de la limite en loi (la loi limite est unique ; pas la v.a. limite).

2 Relations entre ces modes de convergence

Résumé visuel (avec notamment L^∞, L^p, L^1).

2.1 Borel Cantelli

- Définitions et remarques sur les limites inférieures et supérieures d'ensembles.
- Énoncé.
- Preuve :
  - Partie triviale. Pour tout n, on a
    $$P(\limsup A_k) \leq P(\cup_{k \geq n} A_k) \leq \sum_{k \geq n} P(A_k).$$
    On fait tendre n vers l'infini.
  - Partie non triviale. Pour tout n et $m \geq n$, on a :
    $$P(\cup_{n \leq k \leq m} A_k) = 1 - P(\cap_{n \leq k \leq m} A_k^c) = 1 - \prod_{k=n}^{m} (1 - P(A_k)) \geq 1 - \exp(-\sum_{k=n}^{m} P(A_k)).$$
    On passe à la limite en m puis on conclut.

2.2 Convergence p.s. et convergence en probabilité

1. La convergence p.s. entraine la convergence en probabilité. Preuve : convergence dominée.
2. La réciproque est fausse. Exemples :
   (a) Des X_n indépendantes de lois données par $P(X_n = 1) = 1/n$ et $P(X_n = 0) = 1 - 1/n$. Preuve par Borel-Cantelli.
   (b) Univers probabilisé : $[0, 1]$, tribu des boréliens, mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$. On énumère les intervalles diadyques puis on prend pour X_n les indicatrices.
3. La convergence en probabilité entraine l'existence d'une sous-suite pour laquelle il y a convergence p.s. Preuve : $P(|X_{\phi(n)} - X| \geq 1/n^2) \leq 1/n^2$ puis BC trivial.

Par conséquent, si U est une v.a. de loi uniforme sur $[0, 1]$, alors $G(U)$ a la même loi que X.

2.3 Uniforme intégrabilité

Définition. Une famille $(X_i)_i$ de variables aléatoires est dite uniformément intégrable si :

$$\lim_{M\to\infty} \sup_i E(|X_i| 1_{|X_i|>M}) = 0.$$

Une telle famille est nécessairement bornée dans L^1.

Caractérisation. Une famille $(X_i)_i$ de variables aléatoires est uniformément intégrable si et seulement si elle est bornée dans L^1 et si :

$$\lim_{\alpha\to 0} \sup_{A:P(A)\leq\alpha} \sup_i E(|X_i| 1_A) = 0.$$

Pour le sens direct, noter que $|X|1_A \leq |X|1_{\{|X|>M\}} + M1_A$.

Quelques exemples (sans doute par ordre croissant de difficulté).

- Une famille réduite à une variable aléatoire intégrable.
- Une famille finie de variables aléatoires intégrables.
- Une famille de variables aléatoires dominées par une variable aléatoire intégrable.
- Une famille de variables aléatoires bornée dans L^p pour un $p > 1$. (Utiliser Hölder et Markov.)
- Une famille d'espérances conditionnelles d'une variable aléatoire intégrable fixée (ce sont les tribus que l'on fait varier). (Utiliser Jensen, Chebyshev et des idées liées à la caractérisation précédente.)

Théorème 2.1 (Vitali) *Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires convergeant en probabilité vers une variable aléatoire X. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *La suite $(X_n)_n$ est uniformément intégrable.*
2. *Les X_n et X sont intégrables ; la suite $(X_n)_n$ converge dans L^1 vers X.*
3. *Les X_n et X sont intégrables ; la suite des $E(|X_n|)$ converge vers $E(|X|)$.*

Remarque. C'est un raffinement du théorème de convergence dominée.

Définition équivalente H est uniformément intégrable s'il existe $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tel que $f(t)/t \to \infty$ et $\{Ef(|X|), X \in H\}$ bornée.

2.4 Convergence en probabilité et convergence L^1

1. La convergence L^1 entraine la convergence en probabilité. Preuve : Markov.
2. La convergence en probabilité n'entraine pas la convergence L^1. Exemples :
   (a) Si les v.a. ne sont pas dans L^1.
   (b) X_n telles que $P(X_n = 0) = 1 - 1/n$ et $P(X_n = 2^n) = 1/n$. Convergence en probabilité vers 0, mais pas convergence dans L^1.
3. Convergence en probabilité et uniforme intégrabilité des v.a. entraine la convergence L^1.

2.5 Convergence sur les différents L^p

Si $p < q$ alors la convergence L^q entraine la convergence L^p. On a en effet : Preuve :

$$\|Y\|_p \leq \|Y\|_q.$$

C'est immédiat si $q = \infty$. C'est aussi une conséquence de Hölder (en utilisant le fait que la mesure est de masse 1) :

$$\int |Y|^p dP = \int |Y|^p .1 dP \leq \left(\int (|Y|^p)^{q/p}\right)^{1/(p/q)} \left(\int 1^{(q/p)'}\right)^{1/(q/p)'} = \left(\int |Y|^q\right)^{q/p}.$$

C'est aussi une conséquence de Jensen, mais il faut travailler un peu (tronquer et passer à la limite par exemple) :

$$\big(E\min(|Y|^p, A)\big)^{q/p} \leq E\min(|Y|^p, A)^{q/p}.$$

2.6 Convergence en probabilité et convergence en loi

1. La convergence en probabilité entraine la convergence en loi (utiliser des fonctions uniformément continues et bornées).
2. La convergence en loi n'entraine pas la convergence en probabilité. $X_n = X_0$ symétrique ± 1. $X = -X_0$.