Martingales

v0 juin 2013 ; v1 15 décembre 2013 / non relue sérieusement

Référence. Durrett (mais le Williams est paraît-il très bien).

Cadre. $(\mathcal{F}_n)_n$ une filtration.

1 Définitions

Un processus $(X_n)_n$ est une martingale (respectivement à la filtration $(\mathcal{F}_n)_n$) si :

1. Le processus est adapté.
2. Pour tout n, X_n est intégrable.
3. Pour tout n, $E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n$.

C'est une sous-martingale si on remplace "=" par "≥" dans la dernière propriétée. C'est une sur-martingale si on remplace "=" par "≤". En particulier, $(X_n)_n$ est une sous-martingale si et seulement si $(-X_n)_n$ est une sur-martingale. Par ailleurs, $(X_n)_n$ est une martingale si et seulement si $(X_n)_n$ est à la fois une sous-martingale et une sur-martingale.

Pour une sur-martingale, on a par exemple pour tout $n \geq m+1$: $E(X_n|\mathcal{F}_m) \leq X_m$ et donc en particulier $E(X_n) \leq E(X_m)$. Les inégalités sont renversées pour une sous-martingale. Pour une martingale, on a les deux inégalités et on a donc égalité.

Exemple le plus simple (parmi les exemples non triviaux). Une marche aléatoire à pas intégrables et centrés pour la filtration naturelle.

2 Quelques résultats

2.1 Jensen

Théorème 2.1 *Si $(X_n)_n$ est une martingale, si $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est convexe et si tous les $\phi(X_n)$ sont intégrables, alors $(\phi(X_n)_n)$ est une sous-martingale.*

C'est une conséquence immédiate de l'inégalité de Jensen conditionnelle.

Cas particulier important. Considérer la fonction ϕ définie par $\phi(x) = |x|^p$ pour $p \geq 1$.

Remarque. Le résultat n'est pas vrai pour une sous-martingale (on peut donner un contre-exemple déterministe). Il reste vrai si on exige que ϕ soit croissante.

Exercice. Montrer que si $(X_n)_n$ est une sur-martingale, alors $(X_n \wedge A)_n$ est une sur-martingale où A est un réel fixé.

2.2 Temps d'arrêt

Théorème 2.2 *Si (X_n) est sous-martingale et si N est un temps d'arrêt, alors $(X_{N\wedge n})$ est une sous-martingale.*

Cela se montre par exemple à la main en décomposant.

3 Convergence presque sûre

Théorème 3.1 *Si $(X_n)_n$ est une sous-martingale telle que $\sup_n E(X_n^+)$ est fini alors $(X_n)_n$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire X_∞ intégrable.*

La preuve est jolie mais un peu longue à décrire.

Cas particulier important. Si $(X_n)_n$ est une sur-martingale positive alors $(X_n)_n$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire X_∞ intégrable et telle que $0 \leq E(X_\infty) \leq E(X_0)$.

L'encadrement vient du lemme de Fatou et de la décroissance des $E(X_n)$.

Convergence L^1 ? Considérer une marche aléatoire simple et symétrique $(S_n)_n$ sur $\mathbb{Z}$ issue de 1. Considérer alors $(S_{N\wedge n})_n$ où N est le premier instant où la marche touche 0.

4 Inégalités de Doob

Théorème 4.1 *Si $(X_n)_n$ est une sous-martingale et si N est un temps d'arrêt majoré par une constante k alors :*

$$E(X_0) \leq E(X_N) \leq E(X_k).$$

Preuve. Cela peut se prouver de différentes manières. Pour la première inégalité, on peut par exemple utiliser le fait que $(X_{N\wedge n})_n$ est une sous-martingale. Pour la deuxième on peut par exemple commencer par montrer $E(X_j 1_{N=j}) \leq E(X_k 1_{N=j})$ pour $j \leq k$ puis sommer. $\square$

Et si N n'est pas borné ? Reprendre la marche aléatoire simple et symétrique sur $\mathbb{Z}$ issue de 1 et N, le premier instant où elle touche 0.

Théorème 4.2 (Inégalité de Doob) *Soient $(X_n)_n$ une sous-martingale, $\lambda > 0$ et $k \geq 0$ un entier. On pose :*

$$\overline{X}_k = \max_{0 \leq n \leq k} X_n$$

et

$$A = \{\overline{X}_k \geq \lambda\}.$$

Alors :

$$\lambda P(A) \leq E(X_k 1_A) \leq E(X_k^+).$$

Preuve. La deuxième inégalité est triviale. Pour la première, appliquer le résultat précédent à N, le minimum entre k et le premier instant où X_n dépasse λ. Noter que $X_N \geq \lambda$ sur A et $X_N = X_k$ sur le complémentaire de A. □

Théorème 4.3 (Inégalités maximales $L^p, p > 1$) *Soit $1 < p < \infty$. Si $(X_n)_n$ est une sous-martingale alors, pour tout entier $n \geq 0$:*

$$E\left(\left(\overline{X}_n^+\right)^p\right) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E\left((X_n^+)^p\right).$$

Par conséquent, si $(X_n)_n$ est une martingale alors, pour tout entier $n \geq 0$:

$$E\left(\left(\max_{0 \leq m \leq n} |X_m|\right)^p\right) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E(|X_n|^p).$$

Preuve. Le deuxième point est une conséquence du premier. Le premier se déduit de l'inégalité de Doob, de la représentation des moments d'une variable aléatoire positive à partir de sa fonction de répartition et de l'inégalité de Hölder. On commence par tronquer pour assurer l'intégrabilité, ce qui amène à utiliser également le théorème de convergence monotone. □

Conséquence importante. Si une martingale est bornée dans L^p, alors $\sup_{n \geq 0} |X_n|$ admet un moment d'ordre p.

Pour $p = 1$? On reprend une nouvelle fois la marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}$ issue de 1 et arrêtée en 0. Les résultats sur la ruine du joueur donnent la queue de la probabilité du maximum du processus. Ce maximum est en particulier non intégrable. Le processus est pourtant positif et d'intégrale constante.

Théorème 4.4 (Convergence $L^p, p > 1$) *Soit $1 < p < \infty$. Si $(X_n)_n$ est une martingale bornée dans L^p (i.e. $\sup E(|X_n|^p) < \infty$) alors $(X_n)_n$ converge presque sûrement et dans L^p.*

Preuve. Le résultat de convergence presque sûr s'applique ici. L'inégalité maximale L^p et le théorème de convergence monotone permettent de montrer que le supremum des $|X_n|^p$ est intégrable. Le résultat se déduit alors du théorème de convergence dominée. □

5 Uniforme intégrabilité

Définition. Une famille $(X_i)_i$ de variables aléatoires est dite uniformément intégrable si :

$$\lim_{M\to\infty} \sup_i E(|X_i| 1_{|X_i|>M}) = 0.$$

Une telle famille est nécessairement bornée dans L^1.

Caractérisation. Une famille $(X_i)_i$ de variables aléatoires est uniformément intégrable si et seulement si elle est bornée dans L^1 et si :

$$\lim_{\alpha\to 0} \sup_{A:P(A)\leq\alpha} \sup_i E(|X_i| 1_A) = 0.$$

Pour le sens direct, noter que $|X|1_A \leq |X|1_{\{|X|>M\}} + M1_A$.

Quelques exemples (sans doute par ordre croissant de difficulté).
- Une famille réduite à une variable aléatoire intégrable.
- Une famille finie de variables aléatoires intégrables.
- Une famille de variables aléatoires dominées par une variable aléatoire intégrable.
- Une famille de variables aléatoires bornée dans L^p pour un $p > 1$. (Utiliser Hölder et Markov.)
- Une famille d'espérances conditionnelles d'une variable aléatoire intégrable fixée (ce sont les tribus que l'on fait varier). (Utiliser Jensen, Chebyshev et des idées liées à la caractérisation précédente.)

Théorème 5.1 (Vitali) *Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires convergeant en probabilité vers une variable aléatoire X. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *La suite $(X_n)_n$ est uniformément intégrable.*
2. *Les X_n et X sont intégrables ; la suite $(X_n)_n$ converge dans L^1 vers X.*
3. *Les X_n et X sont intégrables ; la suite des $E(|X_n|)$ converge vers $E(|X|)$.*

Remarque. C'est un raffinement du théorème de convergence dominée.

Définition équivalente H est uniformément intégrable s'il existe $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tel que $f(t)/t \to \infty$ et $\{Ef(|X|), X \in H\}$ bornée.

Théorème 5.2 *Pour une sous-martingale, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *Elle est uniformément intégrable.*
2. *Elle converge presque sûrement et dans L^1.*
3. *Elle converge dans L^1.*

Preuve. Pour montrer que le premier point entraîne le deuxième, on peut appliquer le résultat de convergence presque sûre pour les sous-martingales puis le théorème de Vitali. Pour montrer que le troisième point entraîne le premier, on peut utiliser par exemple le théorème de Vitali. □

Théorème 5.3 *Pour une martingale $(X_n)_n$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *Elle est uniformément intégrable.*
2. *Elle converge presque sûrement et dans L^1.*
3. *Elle converge dans L^1.*
4. *Il existe une variable aléatoire intégrable X telle que, pour tout n, on ait : $X_n = E(X|\mathcal{F}_n)$.*

Preuve. Ce résultat se déduit facilement du précédent. En particulier, la variable aléatoire X apparaissant dans le dernier point est simplement la limite L^1 de la suite. □

6 Théorèmes d'arrêt

Théorème 6.1 *Si $(X_n)_n$ est une sous-martingale uniformément intégrable, alors pour tout temps d'arrêt $N \leq \infty$, on a $E(X_0) \leq E(X_N) \leq E(X_\infty)$ où X_∞ est la limite de la suite des X_n.*

Preuve. On part de $E(X_0) \leq E(X_{N\wedge n}) \leq E(X_n)$ (on utilise ici un temps d'arrêt borné). Il s'agit alors de passer à la limite. □

Rappel. L'uniforme intégrabilité est acquise dès que, par exemple, la sous-martingale est bornée dans L^p pour un réel $p > 1$.

Rappel. L^2 est l'un des L^p les plus agréables.

Il existe d'autres versions de ce résultat. En pratique, partir de $E(X_0) \leq E(X_{N\wedge n}) \leq E(X_n)$ et passer à la limite à la main est souvent efficace.