Remarques. Le sujet est long. Le barème en tient compte. Privilégiez la qualité à la quantité. J'attends une rédaction précise et concise.

Exercices

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$[1].

1. Énoncer un ou deux résultats mathématiques pouvant inciter à utiliser la loi de Poisson dans une modélisation (maximum 5 ou 6 lignes environ).
2. Montrer, pour tout réel t, l'inégalité
$$P(X > t) \leq \inf_{s \geq 0} E(\exp(s(X-t))).$$
3. Soit $t > \lambda$. Établir l'inégalité
$$P(X > t) \leq \left(\frac{\lambda}{t}\right)^t \exp(t - \lambda).$$

Exercice 2. Soit $\Lambda = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $(m, v) \in \Lambda$ on définit l'application $f_{(m,v)}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par
$$f_{(m,v)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2v}\right).$$
Soit $n \geq 2$ un entier. Soient $x_1, \ldots, x_n$ des réels distincts deux à deux. On définit une application L de Λ dans $\mathbb{R}$ par
$$L(m, v) = \prod_{k=1}^{n} f_{(m,v)}(x_k).$$
Montrer que L admet un unique maximum global (m_0, v_0) et expliciter ce maximum.

Exercice 3. Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ où m est un réel et σ un réel strictement positif. Pour tout réel q et tout entier $n \geq 2$ on pose
$$T_n^q = \sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - q}{S_n}$$
où
$$\overline{X}_n = n^{-1}\sum_{k=1}^{n} X_k \text{ et } S_n = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X}_n)^2}.$$
On admet le résultat suivant (théorème de Fischer). Si $q = m$ alors T_n^q suit la loi de Student à $n-1$ degrés de liberté[2].

1. Autrement dit X est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et, pour tout entier naturel k, $P(X = k) = e^{-\lambda}\lambda^k/k!$.
2. La loi de Student à $n-1$ degrés de libertés est la loi de
$$\frac{Z_0}{\sqrt{(Z_1^2 + \cdots + Z_{n-1}^2)/(n-1)}}$$
où les Z_i sont des variables aléatoires gaussiennes centrées réduites et indépendantes.

1. Quelle est la limite presque sûre de S_n lorsque n tend vers l'infini ?
2. On suppose dans cette question $q \neq m$. Quelle est la limite presque sûre de T_n^q lorsque n tend vers l'infini ?
3. Soit $x_1, \ldots, x_n$ un échantillon que l'on suppose convenablement modélisé par $(X_1 \ldots, X_n)$ pour un certain couple (m, σ^2) inconnu. Décrire en quelques lignes un test statistique pour l'hypothèse $m = 2$ contre l'hypothèse alternative $m \neq 2$ au seuil $\alpha = 0.05$.
4. Dans le même cadre que la question précédente, décrire en quelques lignes un test statistique pour l'hypothèse $m \geq 2$ contre l'hypothèse alternative $m < 2$ au seuil $\alpha = 0.05$.

Problème

L'objectif est de prouver la version suivante de la loi des grands nombres.

Théorème 1 *Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires intégrables et de même loi. On suppose les variables deux à deux indépendantes. Alors*[3]

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \to E(X)$$

presque sûrement et dans L^1.

Ce résultat est établi à partir de la version plus faible suivante.

Théorème 2 *Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires* positives, *intégrables et de même loi. On suppose les variables deux à deux indépendantes. Alors*

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \to E(X)$$

presque sûrement.

La preuve du théorème 1 à partir du théorème 2 repose sur la version suivante du lemme de Scheffé.

Lemme 1 (Lemme de Scheffé) *Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires intégrables et positives. Soit Y une variable aléatoire intégrable et positive. On suppose que Y_n converge presque sûrement vers Y. On suppose également la convergence de $E(Y_n)$ vers $E(Y)$. Alors Y_n converge vers Y dans L^1.*

Pour tout réel $\alpha > 1$ et tout entier naturel k on note $\alpha(k)$ la partie entière de α^k :

$$\alpha(k) = \lfloor \alpha^k \rfloor .$$

La preuve du théorème 2 repose sur la version plus faible suivante.

3. X désigne l'une des variables aléatoires de la suite $(X_n)_n$, par exemple X_1.

Théorème 3 *Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires positives, intégrables et de même loi. On suppose les variables deux à deux indépendantes. Soit $\alpha > 1$. Alors*

$$\frac{X_1 + \cdots + X_{\alpha(k)}}{\alpha(k)} \to E(X)$$

presque sûrement lorsque k tend vers l'infini.

La preuve du théorème 3 repose sur la variante suivante.

Théorème 4 *Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires positives, intégrables et de même loi. On suppose les variables deux à deux indépendantes. Soit $\alpha > 1$. Alors*

$$M_k := \frac{X_1 1_{X_1 \le \alpha(k)} + \cdots + X_{\alpha(k)} 1_{X_{\alpha(k)} \le \alpha(k)} - \alpha(k) E\big(X 1_{X \le \alpha(k)}\big)}{\alpha(k)} \to 0.$$

presque sûrement lorsque k tend vers l'infini.

1. Soit z un réel. Exprimer $|z|$ en fonction de z et $z_+ = \max(0, z)$.
2. Établir le lemme de Scheffé. On pourra commencer par montrer la convergence de $E\big((Y - Y_n)_+\big)$ vers 0.
3. Déduire le théorème 1 du théorème 2 et du lemme de Scheffé.
4. Pour tout $\alpha > 1$, donner un équivalent simple de $\alpha(k)$ lorsque k tend vers l'infini.
5. Déduire le théorème 2 du théorème 3.
6. On fixe pour la suite un nombre réel $\alpha > 1$. On suppose par ailleurs dans la suite que $(X_n)_n$ satisfait les hypothèses du théorème 2. Montrer, pour tout entier naturel k, l'inégalité
$$P\left(X_1 1_{X_1 \le \alpha(k)} + \cdots + X_{\alpha(k)} 1_{X_{\alpha(k)} \le \alpha(k)} \ne X_1 + \cdots + X_{\alpha(k)}\right) \le \alpha(k) P\big(X \ge \alpha(k)\big).$$
7. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que, pour tout $x \ge 0$, on ait
$$\sum_{k \ge 0} \alpha(k) 1_{x \ge \alpha(k)} \le Cx.$$
8. En déduire
$$\sum_k P\left(X_1 1_{X_1 \le \alpha(k)} + \cdots + X_{\alpha(k)} 1_{X_{\alpha(k)} \le \alpha(k)} \ne X_1 + \cdots + X_{\alpha(k)}\right) < \infty.$$
9. Déduire le théorème 3 du théorème 4.
10. Montrer, pour tout entier naturel k et tout réel $\varepsilon > 0$, l'inégalité
$$P(|M_k| \ge \varepsilon) \le \frac{E\left(X^2 1_{X \le \alpha(k)}\right)}{\alpha(k)\varepsilon^2}.$$
11. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que, pour tout $x \ge 0$, on ait
$$x \sum_{k \ge 0} \frac{1}{\alpha(k)} 1_{x \le \alpha(k)} \le C.$$
On pourra commencer par majorer la somme pour x suffisamment grand.
12. Conclure.