Remarques. Le sujet est long. Privilégiez la qualité à la quantité. J'attends une rédaction précise et concise. Je ne demande pas de formaliser les éventuelles applications des propriétés de Markov simple ou forte. En dehors des 3 premiers exercices, je ne demande pas de longs développements sur les questions de mesurabilité (ce qui ne signifie pas que ces questions doivent être ignorées). Quelques questions sont indiquées comme étant difficiles. Leur résolution sera valorisée.

Rappels.

— Si T est un temps d'arrêt associé à la filtration $(\mathcal{F}_n)_n$, on pose

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n \text{ pour tout entier } n\}.$$

— Un ensemble $\mathcal{P}$ de parties de Ω est un π-système si, pour tout $A, B \in \mathcal{P}$, $A \cap B \in \mathcal{P}$.

— Un ensemble $\mathcal{L}$ de parties de Ω est un λ-système si :
  — $\Omega \in \mathcal{L}$.
  — Pour tout $A, B \in \mathcal{L}$, si $A \subset B$ alors $B \setminus A \in \mathcal{L}$.
  — Pour toute suite croissante $(A_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{L}$, la réunion des A_n appartient à $\mathcal{L}$.

— Si un λ-système $\mathcal{L}$ contient un π-système $\mathcal{P}$, alors $\mathcal{L}$ contient $\sigma(\mathcal{P})$.

Exercice 1 (Mesurabilité). Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires réelles. Montrer que $\{(X_n)_n \text{ converge}\}$ est un évènement.

Exercice 2 (Mesurabilité et tribu du passé). Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires réelles. Soit T un temps d'arrêt pour la filtration naturelle de $(X_n)_n$. On suppose $T(\omega)$ fini pour tout $\omega \in \Omega$.

1. T est-il $\mathcal{F}_T$ mesurable ?
2. X_T est-il $\mathcal{F}_T$ mesurable ?
3. (T, X_T) est-il $\mathcal{F}_T$ mesurable ?

Exercice 3 (Indépendance et π-systèmes). Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux ensembles d'évènements. On suppose que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont deux π-systèmes. On suppose également que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont indépendants.

1. Montrer que $\mathcal{P}$ et $\sigma(\mathcal{P}')$ sont indépendants. On pourra considérer, pour $A \in \mathcal{P}$ donné, l'ensemble

$$\mathcal{L}(A) = \{A' \in \sigma(\mathcal{P}') : P(A \cap A') = P(A)P(A')\}.$$

2. En déduire que $\sigma(\mathcal{P})$ et $\sigma(\mathcal{P}')$ sont indépendants.

Exercice 4 (Lien entre quelques modes de convergence). On ne demande pas de démonstrations dans cet exercice. On considère les modes de convergence suivants pour une suite de variables aléatoires réelles bornée dans L^1 (la suite des normes L^1 des variables aléatoires est bornée) : presque sûre, en probabilité, en loi et L^1. Pour chacun des 12 couples de modes de convergence distincts préciser si la convergence suivant le premier mode entraîne toujours la convergence suivant le second mode ; donner un contre-exemple lorsque ce n'est pas le cas. On donnera des réponses concises comme « L^1 entraîne p.s. » ou « L^1 n'entraîne pas p.s. : contre-exemple ...».

Exercice 5 (Percolation de premier passage). Soit $d \geq 2$. On dit que deux éléments x et y de $\mathbb{Z}^d$ sont voisins si la distance euclidienne entre x et y vaut 1. On considère dans tout cet exercice le graphe associé :

— L'ensemble des sommets est $\mathbb{Z}^d$.

— L'ensemble des arêtes est $\{\{x, y\} : x, y \in \mathbb{Z}^d$ tels que x et y sont voisins$\}$

On se donne une famille $(\ell(e))_e$ de v.a.i.i.d. strictement positives indexées par les arêtes du graphe. Pour simplifier on écrira $\ell(x, y)$ ou $\ell(y, x)$ pour $\ell(\{x, y\})$. On appelle chemin une suite $\pi = (x_0, \ldots, x_n)$ de sommets de $\mathbb{Z}^d$ telle que, pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, x_i et x_{i+1} sont voisins. C'est un chemin de a à b si $x_0 = a$ et $x_n = b$. On appelle longueur du chemin $\pi = (x_0, \ldots, x_n)$ la quantité

$$\ell(\pi) = \sum_{i=0}^{n-1} \ell(x_i, x_{i+1}).$$

Pour tous sommets $a, b \in \mathbb{Z}^d$, on pose

$$D(a, b) = \inf_{\pi} \ell(\pi)$$

où l'infimum porte sur tous les chemins de a à b. On note $(u_1, \ldots, u_d)$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$. On suppose que $\min(\ell_1, \ldots, \ell_{2d})$ est intégrable où les ℓ_i sont des v.a.i.i.d. de même loi que $\ell(0, u_1)$.

1. Soit X une variable aléatoire positive. Montrer
$$E(X) = \int_0^\infty P(X \geq t)dt.$$
2. Montrer que
$$\int_0^\infty P(\ell_1 \geq t)^{2d} dt$$
est finie.
3. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires de même loi. Montrer, pour tout réel $t > 0$,
$$P(X_1 + \cdots + X_n \geq t) \leq nP(X_1 \geq t/n).$$
4. Exhiber $2d$ chemins de 0 à u_1 tels qu'aucune arête ne soit utilisée par deux chemins ou plus. On ne demande pas de démonstration.
5. Utiliser les idées ou résultats des questions précédentes pour montrer que $D(0, u_1)$ est intégrable (difficile).
6. Montrer que D satisfait l'inégalité triangulaire (c'est en fait une distance).
7. Déduire des questions précédentes que $D(x, y)$ est intégrable pour tout $x, y \in \mathbb{Z}^d$.
8. Exploiter à nouveau l'inégalité triangulaire pour montrer que $E(D(0, nu_1))/n$ converge vers une limite finie que l'on note μ (difficile).
9. On suppose dans cette question que ℓ_1 est intégrable et non constant. Montrer $\mu < E(\ell_1)$ (difficile).

Exercice 6 (Galton-Watson). Soit $X_{n,i}, n, i \geq 1$ une famille de v.a.i.i.d. intégrables à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note μ leur espérance commune. On suppose $\mu > 0$. On définit un processus $(Z_n)_{n\geq 0}$ par $Z_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 1$:

$$Z_n = \sum_{i=1}^{Z_{n-1}} X_{n,i}.$$

Pour tout $n \geq 0$ on note $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par les $X_{k,i}, 1 \leq k \leq n, 1 \leq i$.

1. Vérifier que le processus défini par $W_n = \mu^{-n} Z_n$ est une martingale pour la filtration précédente.
2. En déduire que W_n converge p.s. vers une v.a. W p.s. finie.
3. On suppose $\mu < 1$. Montrer que W est p.s. nulle.
4. On suppose $\mu = 1$ et $P(X_{1,1} = 1) < 1$. Montrer que W est p.s. nulle.
5. On suppose $\mu > 1$ et $\sigma^2 :=\mathrm{var}(X_{1,1}) < \infty$. On veut montrer que W n'est pas p.s. nulle. Indications :
   (a) Montrer
   $$E(W_n^2|\mathcal{F}_{n-1}) = W_{n-1}^2 + E\big((W_n - W_{n-1})^2|\mathcal{F}_{n-1}\big).$$
   (b) Montrer
   $$E\big((W_n - W_{n-1})^2|\mathcal{F}_{n-1}\big) = \mu^{-2n}\sigma^2 Z_{n-1}.$$
   (c) Montrer
   $$E(W_n^2) = E(W_{n-1}^2) + \sigma^2\mu^{-n-1}.$$
   (d) En déduire que W_n est bornée dans L^2.
   (e) Conclure.

Exercice 7 (Marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}$). On considère une marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}$ issue de l'origine [1].

1. Donner une modélisation.
2. Quelle est la probabilité que le marcheur touche a avant b si a et b sont deux entiers tels que $a < 0 < b$?
3. Quel est le temps moyen qu'il met pour toucher a ou b si a et b sont deux entiers tels que $a < 0 < b$?
4. Quelle est la probabilité qu'il revienne en 0 ?

1. Le marcheur part de l'origine. À chaque pas de temps, il se déplace d'un pas vers la gauche avec probabilité 1/2 ou vers la droite avec probabilité 1/2.