Chaînes de Markov - TD3.

Cadre. Sauf mention du contraire, S est un espace d'état, p un noyau de transition, μ une mesure de probabilité sur S et $(X_n)_n$ une chaîne de Markov de noyau p et de loi initiale μ.

Exercice 1 (Communication, irréductibilité). Si x et y sont deux états, on définit une relation $x \to y$ par

$$x \to y \text{ est vraie si } \mathbb{P}^x(T_+^y < \infty) > 0.$$

1. Soient $x, y \in S$. On suppose $p(x,y) > 0$. Montrer $x \to y$.
2. Soient $x, y \in S$. Montrer l'équivalence entre les deux propriétés
   (a) $x \to y$.
   (b) Il existe $n \geq 1$ et des états $x = s_0, s_1, \ldots, s_n = y$ tels que, pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, $p(s_i, s_{i+1}) > 0$.
3. Montrer que la relation $\to$ est transitive.

Exercice 2. Le noyau de transition suivant est-il irréductible ?

$$p = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/3 & 0 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 \\ 1/8 & 1/4 & 0 & 0 & 5/8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 (Mesure réversible). Soit ν une mesure sur S. On dit qu'elle est réversible si, pour tout $x, y \in S$, on a

$$\nu(x)p(x,y) = \nu(y)p(y,x).$$

Montrer qu'une mesure réversible est stationnaire.

Exercice 4 (Marche simple sur un graphe). Soit G un graphe simple[1] et non orienté. On suppose que le degré[2] $d(x)$ de tout sommet x est fini et au moins égal à 1. On note S l'ensemble des sommets de G. On définit $p : S \times S \to [0,1]$ par

- $p(x,y) = 1/d(x)$ s'il existe une arête entre x et y.
- $p(x,y) = 0$ sinon.

1. Montrer que p est un noyau de transition.
2. À quelle condition sur le graphe la chaîne est-elle irréductible ?
3. Montrer que d (avec les abus classiques) est une mesure réversible et stationnaire.

1. Un graphe est simple lorsqu'il y a au plus une arête entre deux sommets.
2. Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes ayant ce sommet pour extrémité.

Exercice 5 (Urne d'Ehrenfest - v1). Soit $N \geq 1$ un entier. Soit $(X_n)_n$ une chaîne de Markov sur $\{0,1\}^N$ dont les transitions sont données par :

$$\begin{cases} p_{x,y} = 1/N \text{ si les vecteurs } x \text{ et } y \text{ diffèrent d'une seule coordonnée,} \\ p_{x,y} = 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que la chaîne est irréductible et qu'elle a une unique loi stationnaire.
2. Quelle est sa loi stationnaire ?

Exercice 6 (Urne d'Ehrenfest - v2). Soit $N \geq 1$ un entier. Soit $(Y_n)_n$ une chaîne de Markov sur $\{0, \ldots, N\}$ dont les transitions sont données par :
- Pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$, $p(i, i-1) = i/N$.
- Pour tout $i \in \{0, \ldots, N-1\}$, $p(i, i+1) = 1 - i/N$.
- Les autres probabilités de transition sont nulles.

1. Montrer que la chaîne est irréductible et qu'elle a une unique loi stationnaire.
2. Quelle est sa loi stationnaire ? La v1 peut donner l'intuition du résultat.
3. Préciser mathématiquement les liens entre la v1 et la v2.