Chaînes de Markov - TD2.

Cadre. Sauf mention du contraire, S est un espace d'état, p un noyau de transition et μ une mesure de probabilité sur S.

Exercice 1 (Espérance conditionnelle discrète). Soit X une v.a. à valeurs dans $[0,+\infty]$. Soit A un évènement de probabilité non nulle. On pose

$$\mathbb{E}(X|A) := \int_\Omega X(\omega)d\mathbb{P}_A(\omega)$$

où $\mathbb{P}_A$ est la mesure de probabilité conditionnelle à A sur $(\Omega,\mathcal{F})$ définie par $\mathbb{P}_A(\cdot)=\mathbb{P}(\cdot|A)$. Montrer

$$\mathbb{E}(X|A) = \frac{\mathbb{E}(X\mathbb{1}_A)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Cette égalité subsiste-t-elle si X est une v.a. réelle intégrable respectivement à $\mathbb{P}$?

Exercice 2 (Markov faible). Soit $(X_n)_n$ une chaîne de Markov de noyau p dans S. Soit $n\geq 1$. On pose $Y=(X_n,X_{n+1},\dots)$. Soit $\varphi : (S^{\mathbb{N}},\mathcal{P}(S)^{\otimes\mathbb{N}}) \to ([0,+\infty],\mathcal{B}([0,+\infty]))$ une application mesurable. Soient $x_0,\dots,x_n\in S$.

1. On suppose
$$\mathbb{P}(X_0=x_0,\dots,X_n=x_n)>0.$$
Montrer
$$\mathbb{E}[\varphi(Y)|X_0=x_0,\dots,X_n=x_n] = \mathbb{E}^{x_n}[\varphi(Y)].$$
2. On suppose
$$\mathbb{P}(X_n=x_n)>0.$$
Montrer
$$\mathbb{E}[\varphi(Y)|X_n=x_n] = \mathbb{E}^{x_n}[\varphi(Y)].$$

Exercice 3 (La tribu produit). Soit $A\in S$. On définit $\tau : (S^{\mathbb{N}},\mathcal{P}(S)^{\otimes\mathbb{N}}) \to (\overline{\mathbb{N}},\mathcal{P}(\overline{N}))$ par

$$\tau\left((x_n)_n\right) = \inf\{n\geq 0 : x_n\in A\}$$

avec la convention $\inf\emptyset=\infty$. Montrer que τ est mesurable.

Exercice 4 (Marche aléatoire simple). Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur $\mathbb{Z}$ de transitions données par $p_{i,j}=1/2$ si $j=i\pm 1$ et $p_{i,j}=0$ sinon. Si $a\in\mathbb{Z}$, on note T_a le premier instant positif ou nul où la chaîne passe en a. Autrement dit,

$$T_a = \inf\{n\geq 0 : X_n = a\}$$

avec la convention $\inf\emptyset=+\infty$.

1. Soit $a\in\mathbb{Z}$. Montrer que T_a est mesurable.
2. Soit $a\geq 1$. On définit une application f de $\{0,\dots,a\}$ dans $[0,1]$ par
$$f(x) = \mathbb{P}^x(T_a<T_0).$$
Expliciter f. Indication : trouver un lien, lorsque $x\in\{1,\dots,a-1\}$, entre $f(x-1), f(x)$ et $f(x+1)$.
3. Soit $a\geq 1$. On définit une application g de $\{0,\dots,a\}$ dans $[0,+\infty]$ par
$$g(x) = \mathbb{E}^x(\min(T_0,T_a)).$$
Expliciter g. Indication : trouver un lien, lorsque $x\in\{1,\dots,a-1\}$, entre $g(x-1), g(x)$ et $g(x+1)$.

Exercice 5 (Temps d'arrêt et tribu du passé). Soit $(X_n)_n$ une chaîne de Markov sur S.

1. Soient A et B deux parties de S.
   (a) Montrer que T_A et T_B sont deux temps d'arrêt.
   (b) Montrer que $\{T_A<T_B\}$ appartient à $\mathcal{F}_A$ et à $\mathcal{F}_B$. Qu'en est-il de $\{T_B<T_A\}$?
2. Soient T et T' deux temps d'arrêt. Montrer que $\min(T,T')$ est un temps d'arrêt.

Exercice 6 (Marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$). Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur $\mathbb{Z}$ de transitions données par $p_{i,j} = 1/2$ si $j = i \pm 1$ et $p_{i,j} = 0$ sinon.

1. (a) Soit $a \geq 1$. Expliciter la probabilité que la chaîne issue de l'origine sorte de l'intervalle $\{-a, \ldots, a\}$ avant de retoucher l'origine.

   (b) En déduire que la chaîne est récurrente.

2. Soit $s \in]0, 1[$. On pose

$$\varphi(s) = \mathbb{E}^0(s^{T^0_+}).$$

   L'objectif est de montrer

$$\varphi(s) = 1 - \sqrt{1 - s^2}.$$

   (a) Montrer

$$\varphi(s) = s\mathbb{E}^1(s^{T^0}).$$

   (b) Montrer

$$\varphi(s) = \frac{1}{2}s^2\mathbb{E}^2(s^{T^0}) + \frac{1}{2}s^2.$$

   (c) Montrer

$$\mathbb{E}^2(s^{T^0}) = \left(\mathbb{E}^1(s^{T^0})\right)^2.$$

   (d) Conclure.

Exercice 7. Soit $(X_n)_n$ une chaîne de Markov de noyau p.

1. On fixe $x \in S$. On définit, pour tout $s \in [0, 1[$, les quantités

$$a(s) = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}^0(X_n = 0)s^n \text{ et } b(s) = \mathbb{E}^0(s^{T_0^+}).$$

   Montrer l'égalité $a(s) = 1/(1 - b(s))$.

2. Méditer l'exemple de la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$.

Exercice 8 (Marches aléatoires biaisées sur $\mathbb{Z}$). Soit $(X_n)_n$ une chaîne de Markov sur $\mathbb{Z}$ dont les transitions sont données par $p_{i,i+1} = p$, $p_{i,i-1} = 1 - p$ et $p_{i,j} = 0$ sinon. On suppose $p > 1/2$ (que se passe-t-il dans le cas $p < 1/2$?).

1. Montrer que la chaîne est transiente.
2. Soit x un entier négatif. Quelle est la probabilité que la chaîne touche 0 si elle part de x ?
3. Soit x un entier positif. Quelle est la probabilité que la chaîne touche 0 si elle part de x ? Indication : la stratégie employée dans le cas $p = 1/2$ fonctionne également ici.
4. Quelle est la probabilité que la chaîne retouche 0 si elle part de 0 ?

Exercice 9 (Temps de sortie géométrique). Soit $(X_n)_n$ une chaîne de Markov de noyau p. Soit C un sous-ensemble de S non vide et distinct de S. On note T le premier instant positif ou nul où la chaîne sort de C. On suppose :

i. Pour tout $x \in C$, T est fini avec une probabilité non nulle.

ii. L'ensemble C est fini.

1. Montrer que la condition i. est vérifiée si la chaîne est irréductible.
2. Montrer l'existence de $N \geq 1$ et de $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in C$ et tout $k \in \mathbb{N}$ on ait : $\mathbb{P}(T > Nk) \leq (1 - \varepsilon)^k$.
3. En déduire que T est intégrable.

Exercice 10 (Décomposition de premier passage). Soit $(X_n)_n$ une chaîne de Markov de noyau p. Montrer, pour tout $x, y \in S$, l'égalité

$$\mathbb{P}^x(X_n = y) = \sum_{0\leq k\leq n} \mathbb{P}^x(T_y = k)\mathbb{P}^y(X_{n-k} = y).$$