Chaînes de Markov - TD1.

Exercice 1 (Marche aléatoire). Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a.i.i.d. de loi μ sur $\mathbb{Z}^d$. On définit un processus $(S_n)_n$ par $S_0 = 0$ et, pour tout $n \geq 1$,

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Montrer que $(S_n)_n$ est une chaîne de Markov. Préciser sa loi initiale et son noyau de transition. Cela se généralise-t-il si on remplace $\mathbb{Z}^d$ par un autre groupe ?

Exercice 2 (Une chaîne de Markov ?). Soit X_0 une variable aléatoire de loi uniforme sur $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Pour tout $n \geq 1$, on pose $X_n = X_0 + n$. Enfin, pour tout $n \geq 0$, on définit Y_n par

$$Y_n = 0 \text{ si } X_n \in \{0, 1\} \text{ et } Y_n = 1 \text{ sinon}$$

et Z_n par

$$Z_n = 0 \text{ si } X_n \in \{0, 2\} \text{ et } Z_n = 1 \text{ sinon.}$$

1. Quelle est, pour un entier n donné, la loi de X_n ? Le processus $(X_n)_n$ est-il une chaîne de Markov ? Si oui quel est son noyau de transition ? Vérifie-t-il la propriété
$$\forall n \geq 1, \forall x, y \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = x) = \mathbb{P}(X_1 = y |\ X_0 = x)\,?$$
2. Mêmes questions pour le processus $(Y_n)_n$.
3. Mêmes questions pour le processus $(Z_n)_n$.

Exercice 3 (Matrices). Soit $(X_n)_n$ une chaîne de Markov de noyau de transition p sur l'espace d'état $\{1, 2, \ldots, k\}$. On identifie p avec une matrice carrée de taille $k \times k$ que l'on note P et, pour tout entier n, on identifie la loi de X_n avec une matrice ligne de taille $1 \times k$ que l'on note μ_n. Plus précisément, le coefficient (i, j) de P est $p(i, j)$ et le coefficient $(1, i)$ de μ_n est $\mathbb{P}(X_n = i)$. Montrer, pour tout entier $n \geq 0$, l'égalité

$$\mu_n = \mu_0 P^n.$$

Exercice 4 (La transmission). Des étudiants sur une rangée décident de tricher lors d'un examen. La réponse à l'une des questions est « oui » ou « non ». Pour fixer les idées, disons que la bonne réponse est « oui ». L'étudiant à l'extrémité droite de la rangée connaît la réponse. Il transmet la réponse à son voisin de gauche, qui la transmet à son tour à son voisin de gauche et ainsi de suite. On suppose que chaque transmission est bonne avec une probabilité $p \in]0, 1[$, indépendamment des autres transmissions. On s'interroge sur la probabilité que le $n^{\text{ième}}$ voisin ait compris « oui ».

1. Modéliser le problème par une chaîne de Markov.
2. Expliciter la probabilité recherchée en fonction de n.
3. Comment se comporte cette probabilité lorsque n tend vers l'infini ?
4. Que se passe-t-il si l'étudiant de droite a simplement une probabilité $q \in [0, 1]$ de répondre correctement à la question ?