Chaînes de Markov - 2017/2018 - CC2

Rappels et notations. Soit $X = (X_n)_n$ une chaîne de Markov sur un espace d'états S et de noyau de transition p.

— Si X est irréductible et si S est fini alors X est positivement récurrente.

— Pour tout état x on note $d(x)$ le plus grand commun diviseur de

$$\{n \geq 1 : p^n(x,x) > 0\}.$$

Une chaîne irréductible est dite apériodique lorsque $d(x) = 1$ pour tout état x.

— Supposons X irréductible et positivement récurrente. Notons μ son unique loi stationnaire. Alors pour tout état $x \in S$ on a

$$\mu(x) = \frac{1}{\mathbb{E}^x(T_+^x)}$$

où

$$T_+^x = \inf\{n \geq 1 : X_n = x\}.$$

— Supposons X irréductible, positivement récurrente et apériodique. Notons μ son unique loi stationnaire. Alors

$$\forall x, y \in S, \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}^x(X_n = y) = \mu(y). \tag{1}$$

— Si x et y sont deux états, on définit une relation $x \to y$ par

$$x \to y \text{ est vraie si } \mathbb{P}^x(T_+^y < \infty) > 0.$$

Exercice 1. Dans les affirmations suivantes, on note S l'espace d'états et p le noyau de transition de la chaîne de Markov évoquée. Ces affirmations sont-elles vraies ou fausses ?

1. Pour toute chaîne de Markov $X = (X_n)_n$, si

$$\forall x, y \in S,\ p(x,y) > 0 \tag{2}$$

alors X est irréductible.

2. Pour toute chaîne de Markov $X = (X_n)_n$, si X est irréductible alors X vérifie (2).

Exercice 2. Donner un exemple de chaîne de Markov irréductible et positivement récurrente ne satisfaisant pas la propriété (1).

Exercice 3. Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $\{1, \ldots, 6\}$. On définit une suite $(S_n)_n$ de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ par $S_0 = 0$ (le 0 de $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$) et, pour tout entier $n \geq 1$,

$$S_n = S_{n-1} + \overline{X_n}$$

où $\overline{X_n}$ désigne la classe de X_n modulo 13.

1. Montrer que $S = (S_n)_n$ est une chaîne de Markov dont on précisera le noyau de transition p.
2. Cette chaîne est-elle irréductible ?
3. Montrer qu'elle est positivement récurrente.
4. Expliciter son unique loi stationnaire que l'on notera μ. Indication : des arguments de symétrie peuvent permettre de deviner μ.
5. La suite $\mathbb{P}^0(S_n = 0)$ converge-t-elle lorsque n tend vers l'infini ? Si oui quelle est la limite ?
6. Que vaut $\mathbb{E}^0(T_+^0)$ où $T_+^0 = \inf\{n \geq 1 : S_n = 0\}$?

Exercice 4. Soit $(X_n)_n$ une chaîne de Markov sur $S = \{a, b, c\}$ de noyau de transition

$$p = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Pour tout état $s \in S$ on pose $\varphi(s) = \mathbb{E}^s(T)$ où

$$T = \inf\{n \geq 0 : X_n = a\}.$$

Expliciter $\varphi(a), \varphi(b)$ et $\varphi(c)$. On pourra utiliser la propriété de Markov simple pour obtenir des relations entre ces différentes quantités.

Exercice 5. Soit $N \geq 1$ un entier. Soit $(X_n)_n$ une chaîne de Markov sur $\{0, \ldots, N\}$ dont les transitions sont données par :

— Pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$, $p(i, i-1) = i/N$.

— Pour tout $i \in \{0, \ldots, N-1\}$, $p(i, i+1) = 1 - i/N$.

— Les autres probabilités de transition sont nulles.

On pose

$$\alpha = 1 - \frac{2}{N}.$$

1. Montrer, pour tout entier $n \geq 0$, $\mathbb{E}(X_{n+1}) = \alpha\mathbb{E}(X_n) + 1$. On pourra considérer les quantités $\mathbb{E}(X_{n+1}1_{X_n=i})$ pour $i \in \{0, \ldots, N\}$.
2. Expliciter $\mathbb{E}(X_n)$ en fonction de $\mathbb{E}(X_0)$ pour tout entier $n \geq 0$.
3. Quelle est la limite de $\mathbb{E}(X_n)$ quand n tend vers l'infini ?