Chaînes de Markov - 2017/2018 - CC1

Rappel de notations. Si $(X_n)_n$ est une chaîne de Markov sur un espace d'états S, on introduit les objet suivants :

— Si y est un état, on pose

$$T_+^y = \inf\{n \geq 1 : X_n = y\}$$

et

$$N_+(y) = \mathrm{card}\{n \geq 1 : X_n = y\}.$$

— Si x et y sont deux états, on définit une relation $x \to y$ par

$$x \to y \text{ est vraie si } \mathbb{P}^x(T_+^y < \infty) > 0.$$

Rappel d'un résultat. Une chaîne de Markov irréductible sur un espace d'états fini est récurrente et possède une unique loi stationnaire.

Remarques. Le sujet est très long et la notation en tient compte (la somme des points des exercices dépasse largement 20). J'attends des démonstrations concises et précises, mais sans excès de formalisme ni de détails laborieux (notamment sur certaines questions d'irréductibilité).

Exercice 1. Dans les affirmations suivantes, on note S l'espace d'états et p le noyau de transition de la chaîne de Markov évoquée. Ces affirmations sont-elles vraies ou fausses ?

1. Pour toute chaîne de Markov $X = (X_n)_n$, si
$$\forall x, y \in S,\ p(x, y) > 0 \tag{1}$$
alors X est irréductible.
2. Pour toute chaîne de Markov $X = (X_n)_n$, si X est irréductible alors X vérifie (1).
3. Pour toute chaîne de Markov $X = (X_n)_n$, si
$$\exists n \geq 1, \forall x, y \in S,\ p^n(x, y) > 0 \tag{2}$$
alors X est irréductible.
4. Pour toute chaîne de Markov $X = (X_n)_n$, si X est irréductible alors X vérifie (2).

Exercice 2. On considère une chaîne de Markov $X = (X_n)_n$ sur $S = \{0, 1\}$ de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\beta & \beta \end{pmatrix}$$

où α et β sont deux réels de $]0, 1[$.

1. Montrer que X est irréductible et possède une unique loi stationnaire
2. Expliciter cette loi stationnaire.

Exercice 3. Soit $(X_n)_n$ une chaîne de Markov de noyau de transition p sur un espace d'états **fini** S. On fixe un état z de S. On s'intéresse à la loi de T_+^z.

1. On suppose dans cette question que, pour tout $x \in S$, on a $p(x,z) > 0$. On pose $\alpha = \min_{x \in S} p(x,z)$.
   (a) Montrer, pour tout $x \in S$, $\mathbb{P}^x(T_+^z > 1) \leq 1 - \alpha$.
   (b) Montrer pour tout $x \in S$ tout $n \geq 1$, on a $\mathbb{P}^x(T_+^z > n) \leq (1-\alpha)^n$.
   (c) En déduire, pour tout $x \in S$, que $\mathbb{E}^x(T_+^z)$ est fini.
2. On suppose dans cette question que la chaîne de Markov est irréductible.
   (a) Montrer pour tout état x l'existence d'un entier k_x tel que $\mathbb{P}^x(T_+^z \leq k_x)$ soit strictement positif.
   (b) En déduire l'existence d'un entier k et d'un réel $\alpha > 0$ tels que, pour tout $x \in S$, on ait $\mathbb{P}^x(T_+^z > k) \leq 1 - \alpha$. Pour la suite, on fixe k et α vérifiant cette propriété.
   (c) Montrer, pour tout $x \in S$ et tout $n \geq 1$, $\mathbb{P}^x(T_+^z > nk) \leq (1-\alpha)^n$.
   (d) A-t-on, pour tout $x \in S$, $\mathbb{E}^x(T_+^z)$ fini ?

Exercice 4.

1. Soit $(A_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. On pose $X_0 = 0$ et, pour tout entier $n \geq 1$,

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} A_k.$$

   (a) Soit $k \geq 0$. Calculer $\mathbb{P}(X_{2k+1} = 0)$.
   (b) Soit $k \geq 0$. Calculer $\mathbb{P}(X_{2k} = 0)$ et établir l'équivalent

$$\mathbb{P}(X_{2k} = 0) \sim \frac{1}{\sqrt{Ck}},$$

   lorsque $k \to \infty$, pour une certaine constante C à préciser. On pourra utiliser la formule de Stirling, c'est-à-dire l'équivalent

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

   lorsque $n \to \infty$.
   (c) En déduire la valeur de

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X_n = 0). \tag{3}$$

   (d) Montrer que $(X_n)_n$ est une chaîne de Markov issue de 0 et préciser son noyau de transition.
   (e) Montrer que cette chaîne est irréductible.
   (f) Déduire de (3) que cette chaîne est récurrente.

2. Soient $(B_n)_n$ et $(C_n)_n$ deux suites indépendantes de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. Pour tout $n \geq 0$, on définit une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}^2$ par

$$D_n = B_n(1/2, 1/2) + C_n(1/2, -1/2).$$

On pose $Y_0 = (0, 0)$ et, pour tout entier $n \geq 1$,

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n} D_k.$$

   (a) Quelle est la loi de D_0 ?

   (b) Montrer que $(Y_n)_n$ est une chaîne de Markov issue de $(0, 0)$ et préciser son noyau de transition.

   (c) Montrer que cette chaîne est irréductible.

   (d) Montrer, pour tout $n \geq 0$,

$$\mathbb{P}(Y_n = 0) = \mathbb{P}(X_n = 0)^2.$$

   Indication : les vecteurs $(1/2, 1/2)$ et $(1/2, -1/2)$ forment une base de $\mathbb{R}^2$.

   (e) La chaîne est-elle récurrente ou transiente ?

Exercice 5. Soit $(E, \mathcal{F})$ un espace mesurable et S un ensemble dénombrable. Soit $(f_n)_n$ une suite d'applications de E dans S. Rappeler la définition de la tribu produit $\mathcal{P}(S)^{\otimes\mathbb{N}}$ sur $S^{\mathbb{N}}$ et montrer que

$$f : \begin{cases} (E, \mathcal{F}) & \rightarrow \quad (S^{\mathbb{N}}, \mathcal{P}(S)^{\otimes\mathbb{N}}) \\ x & \mapsto \quad (f_n(x))_n \end{cases}$$

est mesurable si et seulement si, pour tout entier $n \geq 1$, $f_n : (E, \mathcal{F}) \rightarrow (S, \mathcal{P}(S))$ est mesurable.