M1. Analyse complexe. Session 1. 2017-2018.

Remarques. J'attends des démonstrations précises et claires à chaque question. Je rappelle que votre copie n'est pas votre brouillon.

Notations. Si $c \in \mathbb{C}$ et $r > 0$ on note $D(c, r)$ le disque ouvert de $\mathbb{C}$ centré en c et de rayon r. Si A est un sous-ensemble de $\mathbb{C}$, on note $\overline{A}$ son adhérence topologique, $\mathrm{Int}(A)$ son intérieur topologique et ∂A sa frontière topologique. Si $z \in \mathbb{C}$, on note $\Re(z)$ sa partie réelle et $\Im(z)$ sa partie imaginaire.

Exercice 1. Soit f une application holomorphe de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n} + 1.$$

Que valent $f(-1)$ et $f'(-1)$?

Exercice 2. On considère les applications f et g de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définies par

$$f(z) = \exp(z) - 5z^3 \text{ et } g(z) = (\exp(z) - 5z^3)(z - 2).$$

1. Combien de zéros (comptés avec multiplicité) l'application f admet-elle dans $D(0, 1)$?
2. Combien de zéros (comptés avec multiplicité) l'application g admet-elle dans $D(0, 1)$?

Exercice 3. Soit $n \geq 2$. Explicitez

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + x^n} dx.$$

On écrira le résultat sous la forme d'une application explicite évaluée en π/n. On pourra utiliser, pour A suffisamment grand, le contour suivant : le segment de 0 à A, l'arc de cercle centrée en 0 de A à $A \exp(i2\pi/n)$ puis le segment de $A \exp(i2\pi/n)$ à 0.

Exercice 4. Existe-t-il une application holomorphe non constante $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = f(z + 1)$ et $f(z) = f(z + i)$?

Exercice 5. Existe-t-il une application holomorphe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ non injective telle que f' ne s'annule pas ?

Problème. Soient $a < b$ deux réels. On pose

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : a < \Re(z) < b\}.$$

Soit $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ une application continue. On suppose que sa restriction à Ω est holomorphe et non nulle. On suppose également qu'il existe un réel A, que l'on fixe, tel que

$$\forall z \in \overline{\Omega}, \ |f(z)| \leq A.$$

On définit une application M de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ par

$$M(x) = \sup\{|f(z)|, z \in \mathbb{C} \text{ tel que } \Re(z) = x\}.$$

On suppose $M(a)$ et $M(b)$ strictement positifs. L'objectif de ce problème est de montrer

$$\forall x \in [a,b],\ M(x) \leq M(a)^{\frac{b-x}{b-a}} M(b)^{\frac{x-a}{b-a}}.$$

1. Montrer que M ne prend que des valeurs strictement positives.
2. Soit $H > 0$. On considère le rectangle

$$R = \{z \in \overline{\Omega} : -H \leq \Im(z) \leq H\}.$$

   On se donne une application continue g définie sur R et holomorphe sur l'intérieur de R. L'objectif de cette question est de montrer, pour tout $z \in R$, l'inégalité

$$|g(z)| \leq \|g\|_{\partial R}$$

   où

$$\|g\|_{\partial R} = \sup\{|g(z)|, z \in \partial R\}.$$

   (a) Montrer que $|g|$ attend son maximum en un point z_0 de R.

   (b) Conclure dans le cas où $z_0 \in \partial R$. On suppose dans la suite que z_0 appartient à l'intérieur de R.

   (c) Montrer qu'il existe $\rho > 0$ tel que $D(z_0, \rho) \subset \mathrm{Int}(R)$.

   (d) En utilisant par exemple l'égalité de Parseval, montrer que g est constante sur $D(z_0, \rho)$.

   (e) Conclure.
3. On fait dans cette question les deux hypothèses supplémentaires : $M(a) = M(b) = 1$.

   (a) Soit $\varepsilon > 0$. On considère l'application $h : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ définie par

$$h(z) = \frac{1}{1 + \varepsilon(z-a)}.$$

   Montrer

$$\forall z \in \partial\Omega,\ |f(z)h(z)| \leq 1$$

   et

$$\forall z \in \Omega,\ |f(z)h(z)| \leq \frac{A}{\varepsilon|\Im(z)|}.$$

   (b) Utiliser la question 2 avec un choix judicieux de H et la question 3.a pour établir

$$\forall z \in \Omega,\ |f(z)h(z)| \leq 1.$$

   (c) En déduire

$$\forall z \in \Omega,\ |f(z)| \leq 1.$$

4. On revient dans cette question au cas général. On introduit l'application $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par

$$g(z) = M(a)^{\frac{b-z}{b-a}} M(b)^{\frac{z-a}{b-a}}.$$

   Considérer l'application f/g pour conclure.