M1. Analyse complexe. Session 2. 2016-2017.

Remarques. J'attends des démonstrations précises et claires à chaque question. Je rappelle que votre copie n'est pas votre brouillon.

Notations. Si $c \in \mathbb{C}$ et $r > 0$ on note $D(c,r)$ le disque ouvert de $\mathbb{C}$ centré en c et de rayon r. Si Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$ on note $\mathcal{H}(\Omega)$ l'ensemble des applications holomorphes de Ω dans $\mathbb{C}$ et $\mathcal{C}(\Omega)$ l'ensemble des applications continues de Ω dans $\mathbb{C}$.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'application polynomiale définie par $f(z) = z^4 - 2z^3 + 9z^2 + z - 1$.

1. Combien de zéros (comptés avec multiplicité) l'application admet-elle dans $D(0,2)$?
2. Combien de zéros (comptés avec multiplicité) l'application admet-elle dans $\mathbb{C} \setminus D(0,2)$?

Exercice 2.

1. Calculer
$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2+1} dx.$$
2. Calculer
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx.$$

Exercice 3. Les assertions suivantes sont-elles vraies ?

1. $\forall f, g \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) \quad (fg = 0) \Rightarrow (f = 0 \text{ ou } g = 0)$.
2. $\forall f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{C}) \quad (fg = 0) \Rightarrow (f = 0 \text{ ou } g = 0)$.

Exercice 4. Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ distinct de $\mathbb{C}$. L'objectif est de montrer qu'il existe une application $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe qui n'admet pas de prolongement holomorphe à $\mathbb{C}$. Autrement dit, il s'agit de montrer la négation de l'assertion « pour toute application holomorphe $f : \Omega \to \mathbb{C}$, il existe une application holomorphe $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dont la restriction à Ω est égale à f ».

1. Soit $w \in \mathbb{C}$. Montrer le résultat dans le cas particulier $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{w\}$.
2. Traiter le cas général.

Problème. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application holomorphe. On suppose
$$\lim_{|z| \to \infty} |f(z)| = \infty.$$
L'objectif est de montrer que f est une application polynomiale.

1. Montrer l'existence d'un réel positif R tel que $D(0,R)$ contient tous les zéros de f.
2. Montrer que f ne possède qu'un nombre fini de zéros.
3. Montrer que la multiplicité de chacun de ces zéros est finie. On note $z_1, \ldots, z_n$ ces zéros et $m_1, \ldots, m_n$ leur multiplicité. On pose $Z = \{z_1, \ldots, z_n\}$ et $m = m_1 + \cdots + m_n$.
4. Montrer que l'application g de $\mathbb{C} \setminus Z$ dans $\mathbb{C}$ définie par
$$g(z) = \frac{(z-z_1)^{m_1} \ldots (z-z_n)^{m_n}}{f(z)}$$
se prolonge en une application holomorphe h sur $\mathbb{C}$.

5. Quelle est la limite de
$$\frac{|h(z)|}{|z|^m}$$
lorsque $|z|$ tend vers l'infini ?
6. Montrer qu'il existe une constante C telle que, pour tout $z \in \mathbb{C}$,
$$|h(z)| \leq C(1 + |z|^m).$$
7. Montrer que h est une application polynomiale. Indication : pour tout n, on dispose d'une majoration de $h^{(n)}(0)$ faisant intervenir les valeurs de h sur un cercle contenant l'origine.
8. Conclure.