M1. Analyse complexe. Session 1. 2016-2017.

Remarques. J'attends des démonstrations précises et claires à chaque question. Je rappelle que votre copie n'est pas votre brouillon.

Notations. Si $c \in \mathbb{C}$ et $r > 0$ on note $D(c, r)$ le disque ouvert de $\mathbb{C}$ centré en c et de rayon r. Si Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$ on note $\mathcal{H}(\Omega)$ l'ensemble des applications holomorphes de Ω dans $\mathbb{C}$.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'application polynomiale définie par $f(z) = z^9 + 2z^5 - 7z^3 - 2$.

1. Combien de zéros (comptés avec multiplicité) l'application admet-elle dans $D(0, 1)$?
2. Combien de zéros (comptés avec multiplicité) l'application admet-elle dans $\mathbb{C} \setminus D(0, 1)$?

Exercice 2.

1. Calculer
$$I(a) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{iax}}{1 + x^2} dx$$
pour $a > 0$.
2. Que vaut $I(a)$ pour $a < 0$?

Exercice 3. Les assertions suivantes sont-elles vraies ?

1. $\forall f, g \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) \quad (fg = 0) \Rightarrow (f = 0 \text{ ou } g = 0)$.
2. $\forall f, g \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) \quad (f + g = 0) \Rightarrow (f = 0 \text{ ou } g = 0)$.
3. $\forall f, g \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) \quad (f \circ g = 0) \Rightarrow (f = 0 \text{ ou } g = 0)$.

Exercice 4. Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ distinct de $\mathbb{C}$. L'objectif est de montrer qu'il existe une application $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe qui n'admet pas de prolongement holomorphe à $\mathbb{C}$. Autrement dit, il s'agit de montrer la négation de l'assertion « pour toute application holomorphe $f : \Omega \to \mathbb{C}$, il existe une application holomorphe $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dont la restriction à Ω est égale à f ».

1. Soit $w \in \mathbb{C}$. Montrer le résultat dans le cas particulier $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{w\}$.
2. Traiter le cas général.

Problème. Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres complexes telle que $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$. On pose $Z = \{a_n, n \geq 1\}$ et, pour tout $z \in Z$, on note $m(z)$ le nombre d'entiers n tels que $a_n = z$. Ainsi, pour tout $z \in Z$, $m(z)$ est un entier au moins égal à 1. L'objectif de ce problème est de montrer qu'il existe une application holomorphe f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que

— Pour tout $z \in Z$, z est un zéro de f de multiplicité $m(z)$.
— Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus Z$, $f(z)$ est non nul.

1. On introduit dans cette question un logarithme complexe sur $D(1, 1)$.
   (a) Pour tout $z \in D(0, 1)$ on pose
   $$\log(1 + z) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-z)^k}{k}.$$
   Montrer que cela définit une application holomorphe, que l'on note log, de $D(1, 1)$ dans $\mathbb{C}$.

(b) Montrer, pour tout $z \in D(0,1)$,

$$e^{\log(1+z)} = 1 + z.$$

(c) Montrer, pour tout nombre complexe z tel que $|z| \leq 1/2$.

$$|\log(1+z)| \leq 2|z|.$$

2. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite d'applications holomorphes de Ω dans $\mathbb{C}$. Soit $(M_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels positifs. On pose, pour tout entier $N \geq 1$,

$$g_N = \prod_{n=1}^{N} f_n.$$

On fait les hypothèses suivantes :
— Pour tout n, l'application f_n ne s'annule pas.
— Pour tout n, $\|f_n - 1\|_\infty \leq M_n$.
— Pour tout entier n, $M_n \leq 1/2$.
— $\sum_n M_n < \infty$.
L'objectif est de montrer que g_N converge simplement vers une application holomorphe g de Ω dans $\mathbb{C}$ qui ne s'annule pas.

(a) Montrer que, pour tout n, il existe une application holomorphe u_n de Ω dans $\mathbb{C}$ telle que $f_n = \exp(u_n)$ et $\|u_n\|_\infty \leq 2M_n$.

(b) Conclure.

3. Montrer que la conclusion de la question précédente reste vraie sans l'hypothèse « pour tout entier n, $M_n \leq 1/2$ ».

4. Soit $n \geq 1$. On définit une application holomorphe E_n de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par

$$E_n(z) = (1-z)e^{\sum_{k=1}^{n} z^k/k}.$$

Soit $z \in D(0,1/2)$. L'objectif est de montrer

$$|E_n(z) - 1| \leq e|z|^{n+1}.$$

(a) On pose

$$w = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{z^k}{k}.$$

Montrer $|w| \leq |z|^{n+1}$ et $|w| \leq 1$.

(b) De $|w| \leq 1$ déduire $|1 - e^{-w}| \leq e|w|$.

(c) Conclure.

5. Considérer

$$\lim_{N\to\infty} \prod_{n\geq 1}^{N} E_n(z/a_n)$$

pour conclure. On pourra raisonner localement.