M1. Analyse complexe. Session 2. 2015-2016.

Notations. Si $c \in \mathbb{C}$ et $r > 0$ on note $D(c,r)$ le disque ouvert de $\mathbb{C}$ centré en c et de rayon r. On note $\overline{D}(c,r)$ (respectivement $C(c,r)$) le disque fermé (respectivement le cercle) de même centre et même rayon.

Remarques. J'attends des démonstrations précises et claires à chaque question. Je rappelle que votre copie n'est pas votre brouillon.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'application polynomiale définie par $f(z) = z^4 + 4z + 30$.

1. Combien de racines (comptées avec multiplicité) admet-elle dans $D(0,2)$?
2. Combien de racines (comptées avec multiplicité) admet-elle dans $D(0,3)$?
3. Combien de racines (comptées avec multiplicité) admet-elle dans $\mathbb{C} \setminus D(0,3)$?
4. Admet-elle des racines multiples ?

Exercice 2. Calculer
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)} \mathrm{d}x.$$

Exercice 3. On note Ω l'ensemble des nombres complexes dont la partie imaginaire appartient à $]-1,1[$.

1. Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une application holomorphe telle que $f(x) = 1/(1+x^2)$ pour tout réel x. Que vaut $f(i/2)$?
2. Soient $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ deux applications holomorphes telles que le produit fg est identiquement nul. Montrer que l'une des deux applications est identiquement nulle.

Problème. On pose $D = D(0,1)$, $\overline{D} = \overline{D}(0,1)$ et $C = C(0,1)$.

1. Soient $c \in \mathbb{C}$ et $r > 0$. Soit $f : \overline{D}(c,r) \to \mathbb{C}$ une application continue dont la restriction à $D(c,r)$ est holomorphe. L'objectif est de montrer l'inégalité suivante :
$$\sup_{z \in D(c,r)} |f(z)| \leq \sup_{w \in C(c,r)} |f(w)|.$$
   (a) Montrer qu'il suffit de montrer le résultat dans le cas où $c = 0$ et $r = 1$. Nous supposons que c'est le cas dans la suite.
   (b) Montrer qu'il existe $z_0 \in \overline{D}$ tel que
$$|f(z_0)| = \sup_{z \in \overline{D}} |f(z)|.$$
   (c) Conclure dans le cas $z_0 \in C$. On suppose dans la suite $z_0 \in D$.
   (d) Montrer qu'il existe $\rho > 0$ tel que $D(z_0, \rho) \subset D$ et $\overline{D}(z_0,\rho) \cap C \neq \emptyset$. On fixe alors $w_0 \in \overline{D}(z_0,\rho) \cap C$.

(e) Montrer
$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \rho e^{i\theta})| d\theta.$$

(f) En déduire $|f(w_0)| = |f(z_0)|$.

(g) Conclure.

2. Soit $f : D \to D$ une application holomorphe telle que $f(0) = 0$.

   (a) Montrer qu'il existe une application holomorphe $g : D \to \mathbb{C}$ telle que, pour tout $z \in D, f(z) = zg(z)$.

   (b) Soit $z \in D$. Soit r tel que $|z| < r < 1$. Montrer, en utilisant la première partie du problème,
   $$|g(z)| \leq \frac{1}{r}.$$

   (c) En déduire $|f'(0)| \leq 1$ et, pour tout $z \in D$, $|f(z)| \leq |z|$.