M1. Analyse complexe. Session 1. 2015-2016.

Notations. Si $c \in \mathbb{C}$ et $r > 0$ on note $D(c,r)$ (respectivement $\overline{D}(c,r)$) le disque ouvert (respectivement fermé) de $\mathbb{C}$ centré en c et de rayon r.

Remarques. J'attend des démonstrations précises et claires à chaque question. Je rappelle que votre copie n'est pas votre brouillon.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'application polynomiale définie par $f(z) = z^3 + 4z^2 + z + 1$. Montrer qu'elle admet exactement 2 zéros (comptés avec multiplicité) dans $D(0,1)$.

Exercice 2. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une application holomorphe. Soit γ un lacet paramétrant un cercle dans le sens direct. On note c le centre de ce cercle. On suppose que le cercle est inclus dans Ω et que, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0$. Soit $n \geq 1$. Montrer

$$n! \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{n+1}} d\zeta = 2\pi i f^{(n)}(c).$$

Exercice 3. Calculer

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2} \mathrm{d}x.$$

Exercice 4. Soit $f : D(0,1) \to D(0,1)$ une application holomorphe telle que $f(0) = 0$. Montrer qu'il existe une application holomorphe $g : D(0,1) \to \mathbb{C}$ telle que, pour tout $z \in D(0,1)$, $f(z) = zg(z)$.

Problème. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une application holomorphe.

1. Soient $c \in \Omega$ et $r > 0$ tels que $\overline{D}(c,r) \subset \Omega$.
   (a) Montrer qu'il existe $r' > r$ tel que $D(c,r') \subset \Omega$.
   (b) Montrer
   $$|f(c)| \leq \max_{\theta \in \mathbb{R}} |f(c + re^{i\theta})|.$$
   (c) En déduire que, si f ne s'annule pas sur $D(c,r)$, alors
   $$|f(c)| \geq \min_{\theta \in \mathbb{R}} |f(c + re^{i\theta})|.$$
   (d) En déduire que tout polynôme à coefficient dans $\mathbb{C}$ admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.
2. Soit $z_0 \in \Omega$ telle que $f'(z_0) \neq 0$. L'objectif est de montrer l'existence d'un ouvert V tel que $\{z_0\} \subset V \subset \Omega$ et
   (α) La restriction de f à V est injective.
   (β) $W = f(V)$ est ouvert.

(γ) La réciproque g de l'application

$$\begin{cases} V \to W \\ z \mapsto f(z) \end{cases}$$

est holomorphe.

C'est une conséquence simple du théorème d'inversion locale en analyse réelle mais nous cherchons à donner ici une preuve indépendante.

(a) Montrer qu'il existe un ouvert V tel que $\{z_0\} \subset V \subset \Omega$ et, pour tout $z, z' \in V$,

$$|f(z') - f(z)| \geq \frac{|f'(z_0)|}{2}|z' - z|.$$

On pourra commencer par écrire $f(z') - f(z)$ comme l'intégrale de f' le long d'un chemin bien choisi.

(b) En déduire (α) et la non annulation de f' sur V.

(c) Soient $c \in V$ et $r > 0$ tels que $\overline{D}(c, r) \subset V$.

i. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, |f(c + re^{i\theta}) - f(c)| > 2\eta.$$

ii. Soit $w \in D(f(c), \eta)$. Montrer que la fonction $f - w$ admet un zéro dans $D(c, r)$. On pourra utiliser le résultat de la question 1.(c).

(d) En déduire (β).

(e) Montrer (γ) et expliciter la dérivée de g.