Probabilités - L2 - 2009/2010 - Partiel.

**Cours :**

1. Donner la définition d'une mesure de probabilité.
2. Soit $E$ un ensemble de cardinal $n \geq 1$ et $F$ un ensemble de cardinal $p \geq 1$.
   (a) Combien y-a-t'il d'applications de $E$ dans $F$ ?
   (b) Combien y-a-t'il d'applications injectives de $E$ dans $F$ ?

**Exercice 1 :** On ne demande aucune justification dans cet exercice. On demande par contre de la précision dans les réponses.

1. On pose $\Omega_1 = \{1,2,3,4,5,6\}^3$ et on note $\mathcal{F}_1$ l'ensemble des parties de $\Omega_1$.
   (a) Quel est le cardinal de $\Omega_1$ ?
   (b) Quel est le cardinal de $\mathcal{F}_1$ ?
   (c) $\{1,2,4\}$ est-il un élément de $\Omega_1$ ?
   (d) $\{1,2,4\}$ est-il un élément de $\mathcal{F}_1$ ?
2. On pose $\Omega_2 = \{1,2,3\}$ et on note $\mathcal{F}_2$ l'ensemble des parties de $\Omega_2$. Expliciter $\mathcal{F}_2$.

**Exercice 2 :** Soit $E$ un ensemble de cardinal $n \geq 1$.

1. Combien y-a-t'il d'applications surjectives de $E$ dans $\{1\}$ ?
2. Combien y-a-t'il d'applications surjectives de $E$ dans $\{2\}$ ?
3. Combien y-a-t'il d'applications surjectives de $E$ dans $\{1,2\}$ ?
4. Combien y-a-t'il d'applications surjectives de $E$ dans $\{1,2,3\}$ ?

**Exercice 3 :** On ne cherchera pas à expliciter la modélisation dans cet exercice.

Trois urnes contiennent respectivement deux boules rouges et une boule verte, deux boules vertes et une boule noire, deux boules noires et une boule rouge. On tire au hasard une boule dans la première urne et on la met dans la deuxième, puis on tire une boule dans la deuxième urne et on la met dans la troisième, enfin on tire une boule dans cette troisième urne.

1. Calculer la probabilité que la seconde boule soit verte.
2. Les évènements "la première boule est verte" et "la seconde boule est verte" sont-ils indépendants ?
3. Calculer la probabilité que la dernière boule soit rouge.
4. Calculer la probabilité de piocher trois boules de même couleur.
5. Calculer la probabilité de piocher trois boules de couleurs différentes.

**Exercice 4 :** Soit $\Omega = \{-1,1\}^{2n}$ où $n \geq 1$ est un entier. On munit $\Omega$ de la mesure de probabilité uniforme $P$. On pose

$$A = \{(\omega_1, \ldots, \omega_{2n}) \in \Omega : \omega_1 + \cdots + \omega_{2n} = 2n\}.$$

1. Pour tout $(\omega_1, \ldots, \omega_{2n})$ de $\Omega$ on note $N(\omega_1, \ldots, \omega_{2n})$ le nombre de $\omega_i$ qui valent 1. Cela définit une application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$. Décrire $A$ en utilisant l'application $N$.
2. Calculer $P(A)$.
3. Reprendre les questions précédentes en remplaçant $A$ par

$$B = \{(\omega_1, \ldots, \omega_{2n}) \in \Omega : \omega_1 + \cdots + \omega_{2n} = 0\}.$$