Partiel Probabilité - L2 - 2008-2009

Cours : Soit Ω un univers. On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties de Ω (ainsi, $\mathcal{F}$ est une tribu sur Ω).

1. Donner la définition d'une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$.
2. On se donne une mesure de probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{F})$. Donner la définition d'une variable aléatoire sur l'univers probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Exercice 1 : On pose $\Omega = \{1, \ldots, 10\}$. On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties de Ω.

1. Pour chacune des affirmations suivantes, dire, sans justifier, si elle est vraie ou fausse. (Barème indicatif : 1/2 point par bonne réponse ; -1/2 point par mauvaise réponse ; 0 point si aucune réponse.)
   (a) $2 \in \mathcal{F}$;
   (b) $\{2\} \in \mathcal{F}$;
   (c) $\{2\} \subset \mathcal{F}$;
   (d) $\Omega \in \mathcal{F}$;
   (e) $\mathcal{F} \in \Omega$;
   (f) $\mathcal{F} \subset \Omega$.
2. Quel est le cardinal de $\mathcal{F}$ (je ne demande pas de justifications) ?

Exercice 2 : Vous jettez deux dés. Si les résultats des deux dés sont identiques, vous perdez la somme indiquée par les dés (par exemple, s'ils indiquent tous les deux 4, vous perdez 4 euros). Si par contre les résultats des deux dés sont différents, vous gagnez un euro.

Modéliser cette expérience aléatoire en donnant :

1. Un univers Ω (on le munira de la tribu $\mathcal{F}$ constituée de l'ensemble des parties de Ω) ;
2. Une mesure de probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{F})$;
3. Une variable aléatoire G sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ modélisant votre gain après cette expérience aléatoire.

Exercice 3 : Une urne contient 6 boules numérotées de 1 à 6. On tire au sort successivement et sans remise trois boules de l'urne.

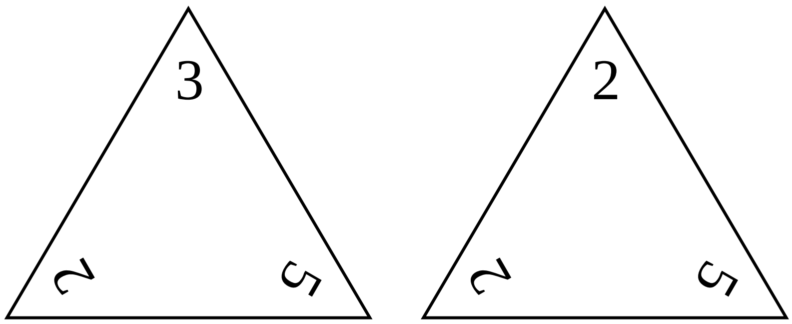
1. Donner une modélisation permettant de répondre aux questions suivantes (et utiliser cette modélisation dans la suite).
2. Calculer les probabilités des évènements suivants :
   (a) $A =$"Le numéro de la première boule tirée est 1" ;
   (b) $B =$"Le numéro de la troisième boule tirée est 3" ;
   (c) $C =$"Le numéro de la troisième boule tirée est pair" ;
   (d) $D =$"Le numéro de la première boule tirée est inférieur au numéro de la troisième boule tirée".
3. Les évènements A et B sont-il indépendants ? Même question pour les évènements B et C.
4. Quelle est la probabilité de D sachant que A est réalisé ? Quelle est la probabilité de A sachant que D est réalisé ? Ces deux évènements sont-ils indépendants ?

Exercice 4 : On ne cherchera pas à expliciter la modélisation dans cet exercice.

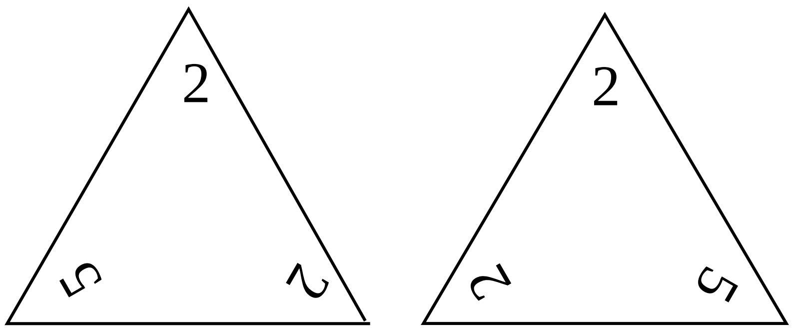
Un professeur décide de faire passer rapidement un oral de probabilités. Il donne à l'étudiant 2 boules blanches et 2 boules noires. L'étudiant doit répartir ces 4 boules entre 2 urnes, en mettant au moins une boule dans chaque urne. Le professeur choisit ensuite au hasard une des urnes puis en extrait, toujours au hasard, une boule. L'étudiant est reçu si la boule choisie est noire.

Comment l'étudiant doit-il répartir les boules pour maximiser ses chances de succès ?

Exercice 5 : Un triomino est une pièce en forme de triangle équilatéral sur chaque coin duquel est inscrit un chiffre choisi parmi $1, 2, \ldots, 6$. Plus exactement, l'une des faces est vierge, l'autre face comporte trois chiffres : un à chaque coin. Voici par exemple deux triominos distincts :



Voici deux triominos identiques (pour obtenir le deuxième, il suffit de faire tourner le premier) :



Combien existe-t-il de triominos distincts ?