Probabilités - L2 - 2007/2008 - Partiel

Cours :
Donner la définition d'une mesure de probabilité.

Exercice 1 : Soit $f : E \to F$ une application.

1. Soient A et B deux sous-ensembles de F. Est-il vrai que l'image réciproque de $A \cup B$ par f est égale à la réunion des images réciproques de A et B par f ? (Démontrer ce que vous avancez.)
2. Même question en remplaçant "image réciproque" par "image directe".

Exercice 2 : On jette trois fois un dé équilibré.

1. Donner une modélisation convenable (univers, tribu et mesure de probabilité).
2. Calculez la probabilité des évènements suivants :
   (a) $A =$"On obtient trois fois le même résultat" ;
   (b) $B =$"On obtient exactement deux résultats différents (par exemple deux 1 et un 3)" ;
   (c) $C =$"Le résultat de l'un des dés est égal à la somme des résultats des deux autres dés".
3. Les évènements B et C sont-il indépendants ?

Exercice 3 : Soient n et p des entiers strictement positifs. On suppose $n \geq p$.

1. Montrer qu'il existe $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ applications strictement croissantes de $\{1, \dots, p\}$ dans $\{1, \dots, n\}$.
2. Déduire de la question précédente qu'il existe $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ $p-$uplets $(x_1, \dots, x_p)$ d'entiers strictement positifs de somme inférieure ou égale à n.
3. Déduire de la question précédente le nombre de $p-$uplets $(x_1, \dots, x_p)$ d'entiers strictement positifs de somme égale à n.

Exercice 4 : On fixe $n \geq 1$ un entier. On appelle chemin un $(2n+1)-$uplet $(x_0, \dots, x_{2n})$ tel que, pour tout $i \in \{1, \dots, 2n\}$, on ait $x_i = x_{i-1} - 1$ ou $x_i = x_{i-1} + 1$. On dit qu'un chemin va de a en b si $x_0 = a$ et $x_{2n} = b$. On dit qu'il passe par 0 s'il existe un indice i tel que $x_i = 0$. Voici un exemple de chemin de 1 à -1 en passant par 0 dans le cas où n vaut 6 :

$$(1, 2, 3, 4, 3, 2, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -1).$$

On dit qu'un chemin monte en $i \in \{0, \dots, 2n-1\}$ si $x_{i+1} = x_i + 1$. Sinon, on dit qu'il descend en i. Ainsi, dans le chemin précédent, il y a 5 montées et 7 descentes.

1. Combien y a-t-il de chemins partant de 1 ?
2. Combien y a-t-il de chemins allant de 1 à 1 ?
3. Combien y a-t-il de chemins allant de 1 à 0 ?

On admet qu'il y a autant de chemins allant de 1 à 1 passant par 0 qu'il y a de chemins de 1 à -1. (L'idée de la preuve est la suivante. On construit une bijection du premier ensemble de chemins sur le second. Cette bijection associe au chemin de l'exemple ci-dessus le chemin $(1, 2, 3, 4, 3, 2, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 1)$, dans lequel une partie du trajet a été "réfléchie".)

4. Combien y a-t-il de chemins allant de 1 à 1 sans passer par 0 ?
5. Si on prend un chemin au hasard et de manière uniforme parmi tous les chemins allant de 1 à 1, quelle est la probabilité qu'il ne passe pas par 0 ?