

Cours :

1. Donner la définition d'une mesure de probabilité.
2. Donner la définition d'une variable aléatoire.
3. Donner, sans justification, le nombre moyen d'essais nécessaires pour obtenir un 4 en lançant un dé.

Exercice 1 : On dispose d'un dé rouge et d'un dé bleu.

1. Donner une modélisation utilisant des variables aléatoires et permettant de répondre aux questions suivantes.
2. Quelle est la probabilité que les deux dés donnent le même résultat ?
3. Quelle est la loi de la somme des deux dés ?
4. Les événements $A =$ "le résultat du dé rouge est pair" et $B =$ "la somme des résultats des dés est paire" sont-ils indépendants ?
5. Les événements $C =$ "le résultat du dé rouge est inférieur à 2" et $D =$ "la somme des résultats est inférieure à 4" sont-ils indépendants ?
6. Quelle est l'espérance de la somme ?
7. Quelle est l'espérance du produit des résultats des deux dés ?
8. Quelle est l'espérance du carré du résultat du dé bleu ?

Exercice 2 : On modélisera avec soin dans cet exercice. Est-il plus probable d'obtenir un quatre en lançant un dé une fois ou d'obtenir au moins un double quatre en lançant deux dés six fois ?

Exercice 3 : Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p . Ainsi, pour tout indice i , $P(X_i = 1) = p$ et $P(X_i = 0) = 1 - p$. On pose $S = X_1 + \dots + X_n$. Les questions suivantes sont du cours, mais je demande de les redémontrer dans le détail.

1. Calculer $E(X_1)$.
2. Calculer $\text{var}(X_1)$.
3. Calculer $E(S)$.
4. Calculer $\text{var}(S)$.

Exercice 4 : Arthur et Maliana possèdent une pièce qui donne pile avec probabilité p et face avec probabilité $1-p$. On suppose $0 < p < 1$. Le paramètre p n'est pas nécessairement égal à $1/2$. Ils jouent suivant les règles suivantes :

- L'un d'eux lance la pièce deux fois. Si les deux lancers donnent le même résultat, il recommence. Il peut donc lancer les pièces 2 fois, 4 fois, 6 fois ou davantage.
- Si le dernier couple de lancers a donné pile puis face, c'est Arthur qui gagne. Si au contraire le dernier couple de lancers a donné face puis pile, c'est Maliana qui gagne.

- On note T le nombre de couple de lancers effectués (1, 2, 3 ou davantage).

Voilà deux exemples de parties :

- Premier couple de lancers : pile puis pile. Deuxième couple de lancers : pile puis face. Arthur a gagné et $T = 2$.
- Premier couple de lancers : face puis face. Deuxième couple de lancers : pile puis pile. Troisième couple de lancers : face puis pile. Maliana a gagné et $T = 3$.

On note A l'évènement "Arthur gagne".

1. Quelle est la loi de T ?
2. Donner l'espérance de T .
3. Calculer $P(A|T = 1)$.
4. Calculer, pour tout entier $k \geq 1$, $P(A|T = k)$.
5. Que vaut $P(A)$?