Examen - Probabilités
L2 - 2008-2009 - Session 2

Rappel : On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ si :

$$P(X = 1) = P(X = 2) = P(X = 3) = P(X = 4) = P(X = 5) = P(X = 6) = 1/6.$$

Cours. Soit Ω un univers. On note $\mathcal{F}$ la tribu sur Ω constituée de l'ensemble des parties de Ω. Donner la définition d'une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

Exercice 1 : On ne cherchera pas à expliciter la modélisation dans cet exercice. Les résultats numériques finaux seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

Une boite U_1 contient 3 billes rouges et 2 billes bleues. Une boite U_2 contient 2 billes rouges et 8 billes bleues. On lance une fois un dé à 6 faces non truqué. Si le résultat du dé est 1 ou 2, on effectue tous les tirages dans la boite U_1, sinon, on effectue tous les tirages dans la boite U_2.

1. On effectue un seul tirage. Quelle est la probabilité d'obtenir une bille rouge ?
2. On effectue maintenant 2 tirages avec remise entre chaque tirage. Quelle est la probabilité d'obtenir 2 billes rouges ?
3. Un observateur extérieur ne voit pas le résultat du dé mais constate que les deux tirages précédents ont donné une bille rouge. Quelle est la probabilité que le résultat du dé soit 3 ?

Exercice 2 : Igor vous propose de jouer toute la nuit au jeu suivant. À chaque partie, l'un de vous deux lance trois dés.

- S'il n'y a aucun 1, vous perdez 1 euros.
- S'il y a un 1, vous gagnez 1 euros.
- S'il y a deux 1, vous gagnez 2 euros.
- S'il y a trois 1, vous gagnez 3 euros.

Acceptez-vous de jouer ? Justifiez aussi complètement et précisément que possible votre réponse.

Exercice 3 (Méthode de rejet) : On jette un dé, une ou plusieurs fois, jusqu'à obtenir un nombre différent de 6. On s'intéresse à la loi du résultat obtenu lors du dernier lancer (celui qui, pour la première fois, a donné un résultat différent de 6).

On modélise cela de la manière suivante. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de loi uniforme sur $\{1, \dots, 6\}$. On note T le plus petit entier n tel que $X_n \neq 6$:

$$T = \min\{n \geq 1 : X_n \neq 6\}.$$

On pose alors $Y = X_T$. Ainsi, si $T = 1$ alors $Y = X_1$, si $T = 2$ alors $Y = X_2$ etc.

1. Quelle est la loi de T ?
2. Quelle est l'espérance de T ?
3. Décrire les évènements $\{Y = 1 \text{ et } T = 1\}$ et $\{T = 1\}$ en utilisant uniquement la variable aléatoire X_1.

4. Décrire les évènements $\{Y = 1 \text{ et } T = 2\}$ et $\{T = 2\}$ en utilisant uniquement les variables aléatoires X_1 et X_2.
5. Calculer, pour tout $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, la probabilité conditionnelle $P(Y = k|T = 1)$.
6. Calculer, pour tout $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, la probabilité conditionnelle $P(Y = k|T = 2)$.
7. Sans justifications, donner, pour tout $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et tout $n \geq 1$, la probabilité conditionnelle $P(Y = k|T = n)$.
8. En déduire la loi de Y.

Exercice 4 : Choisissez un résultat du cours. Énoncez-le précisément puis démontrez-le. La difficulté du résultat déterminera le nombre de points sur lequel sera noté cet exercice. La précision de l'énoncé et la qualité de la démonstration déterminera alors le nombre de points accordés.