Examen Probabilité - Session 2 - L2 - 2007-2008

Rappel de terminologie : On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre p si X prend ses valeurs dans $\{0,1\}$ et si $P(X=1)=p$.

Cours

1. Soit Ω un univers. On note $\mathcal{F}$ la tribu sur Ω constituée de l'ensemble des parties de Ω. Donner la définition d'une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$.
2. Si X_1, ..., X_{10} sont des v.a.i.i.d. de loi Bernoulli de paramètre $1/3$, quelle est la loi de leur somme ?

Exercice 1 : On lance deux dés non pipés, un rouge et un blanc. Donner une modélisation (univers, tribu et probabilité ou bien variables aléatoires) permettant de donner un sens mathématique aux questions suivantes, puis répondre à ces questions en utilisant cette modélisation.

1. Quelle est la probabilité que la somme des résultats des dés vaille 2 ?
2. Quelle est la probabilité que la somme soit paire ?
3. Quelle est l'espérance de la somme ?
4. Quelle est la probabilité que la somme soit inférieure ou égale à 6 sachant que l'un des deux dés a donné un résultat supérieur ou égal à 4 ?
5. Quelle est la probabilité que les deux dés donnent le même résultat ?
6. Quelle est la probabilité que le résultat du dé rouge soit strictement supérieur au résultat du dé blanc ?

Exercice 2 (Approximation d'une application lipschitzienne par des applications polynomiales) :

1. Soit $p \in [0,1]$. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.i.i.d. de Bernoulli de paramètre p. Pour tout $n \geq 1$, on pose
$$M_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$
   (a) Montrer l'égalité
$$\mathrm{var}(X_1 + \cdots + X_n) = \mathrm{var}(X_1) + \cdots + \mathrm{var}(X_n).$$
   C'est un résultat du cours, mais je demande la démonstration.

   (b) En déduire l'égalité
$$\mathrm{var}(M_n) = \frac{\mathrm{var}(X_1)}{n}.$$
   (c) Expliciter la variance de X_1 puis établir l'inégalité
$$\mathrm{var}(M_n) \leq \frac{1}{4n}.$$
2. Les deux questions suivantes sont des résultats du cours, mais je demande la démonstration.

(a) Soit Y une variable aléatoire positive et α un réel strictement positif. Montrer l'inégalité

$$\alpha P(Y \geq \alpha) \leq E(Y).$$

(b) En déduire l'inégalité

$$\alpha^2 P\Big(|M_n - E(M_n)| \geq \alpha\Big) \leq \mathrm{var}(M_n).$$

(c) Avec la question 1, en déduire :

$$P\Big(|M_n - p| \geq \alpha\Big) \leq \frac{1}{4n\alpha^2}.$$

3. Soit f une application 1-lipschitzienne de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Ainsi, pour tout x, y dans $[0,1]$, on a $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$. On pose

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|.$$

(Cette quantité est finie.)

(a) Soit $\alpha > 0$. Montrer l'inégalité suivante :

$$\Big|E(f(M_n)) - f(p)\Big| \leq 2\|f\|_\infty P\Big(|M_n - p| \geq \alpha\Big) + \alpha P\Big(|M_n - p| < \alpha\Big).$$

On pourra commencer par majorer le membre de gauche par

$$E\Big(\big|f(M_n) - f(p)\big|\Big).$$

(b) En déduire, avec la question 2, l'inégalité suivante :

$$\Big|E(f(M_n)) - f(p)\Big| \leq \frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2} + \alpha.$$

(c) En optimisant en α, en déduire :

$$\Big|E(f(M_n)) - f(p)\Big| \leq \frac{3}{2}\left(\frac{\|f\|_\infty}{n}\right)^{1/3}.$$

4. Explicitez $E(f(M_n))$ et expliquer le rapport entre cet exercice et son titre.
5. (Bonus) Peut-on remplacer facilement $\|f\|_\infty$ par quelque chose de plus petit dans les majorations ? Que se passe-t-il si f est simplement supposée continue ?

Remarque postérieure à l'examen. Je prévoyais initialement de faire démontrer ce résultat dans le cas f continue. J'ai finalement remplacé continue par lipschitzien en gardant la même structure pour la preuve. C'est maladroit car dans le cas lipschitzien on peut faire une preuve plus directe.