

Cours : Donner la définition d'une mesure de probabilité.

Exercice 1 : Yannick vous propose de jouer toute la nuit au jeu suivant. À chaque partie, l'un de vous deux lance un dé¹. Si le résultat est 1 ou 2 vous gagnez 6 euros. Si le résultat est 3, 4 ou 5 vous perdez 3 euros. Si le résultat est 6 vous perdez 1 euro. Acceptez-vous de jouer ? Justifiez aussi complètement et précisément que possible votre réponse.

Exercice 2 : On ne cherchera pas à expliciter la modélisation dans cet exercice. Trois urnes contiennent respectivement deux boules rouges et une boule verte, deux boules vertes et une boule noire, deux boules noires et une boule rouge. On tire au hasard une boule dans la première urne et on la met dans la deuxième, puis on tire une boule dans la deuxième urne et on la met dans la troisième, enfin on tire une boule dans cette troisième urne.

1. Calculer la probabilité que la seconde boule soit verte.
2. Les événements "la première boule est verte" et "la seconde boule est verte" sont-ils indépendants ?
3. Calculer la probabilité que la dernière boule soit rouge.
4. Calculer la probabilité de piocher trois boules de même couleur.
5. Calculer la probabilité de piocher trois boules de couleurs différentes.

Exercice 3 : Astrid possède un dé à a faces (le résultat est un entier compris entre 1 et a). Olivier possède un dé à b faces (le résultat est un entier compris entre 1 et b). Chacun d'eux joue son dé à tour de rôle (ils alternent). C'est Astrid qui commence. Le premier qui obtient un 1 a gagné. Voilà un exemple de partie.

- Premier tour. Astrid obtient 3 puis Olivier obtient 5.
- Deuxième tour. Astrid obtient 2 puis Olivier obtient 2.
- Troisième tour. Astrid obtient 1.

Dans cet exemple, Astrid a gagné au troisième tour. L'objectif est de montrer :

$$P(\text{Astrid gagne}) = \frac{b}{b + a - 1}.$$

1. Modéliser le problème avec des variables aléatoires. Utiliser cette modélisation dans la suite.
2. Quelle est la probabilité qu'Astrid gagne au premier tour ?
3. Quelle est la probabilité qu'Astrid gagne au deuxième tour ?
4. Quelle est la probabilité qu'Astrid gagne au tour numéro k ?
5. Quelle est la probabilité qu'Astrid gagne ?
6. Retrouver le résultat précédent en commençant par déterminer, pour tout k , la probabilité qu'Astrid gagne sachant qu'Astrid ou Olivier gagne au tour k .

¹un dé honnête à 6 faces

Exercice 4 : On ne cherchera pas à expliciter la modélisation dans cet exercice.

1. Vous lancez trois dés². Quelle est la probabilité d'obtenir au moins deux 1 ?
2. Tant que vous obtenez au moins un 1 en lançant vos trois dés, vous avez le droit de les relancer tous les trois. Quelle est la probabilité de finir par obtenir au moins deux 1 sur un lancer ? (Vous pouvez par exemple obtenir 1, 3, 4 puis 3, 1, 2 puis 3, 2, 4 et donc échouer ; ou encore obtenir 2, 6, 1 puis 3, 1, 1 et donc réussir.)

Exercice 5 : Choisissez un résultat du cours. Énoncez-le précisément puis démontrez-le. La difficulté du résultat déterminera le nombre de points sur lequel sera noté cet exercice. La précision de l'énoncé et la qualité de la démonstration déterminera alors le nombre de points accordés.

²des dés honnêtes à 6 faces