Examen Probabilité
L2 - 2008-2009
Corrigé sans garantie

Cours. Voir le Cours.

Exercice 1 :

1. La v.a. X suit une loi Binomiale de paramètres n et p. Plus explicitement, X prend ses valeurs dans $\{0,\dots,n\}$ (avec probabilité 1) et, pour tout $k \in \{0,\dots,n\}$, on a :
$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$
2. Par linéarité, on a $E(X) = E(X_1) + \cdots + E(X_n)$. Pour tout k on a $E(X_k) = (1-p).0 + p.1 = p$. Ainsi $E(X) = np$.
3. En utilisant l'indépendance des X_k dans la deuxième égalité on obtient :
$$E(\exp(\lambda X)) = E(\exp(\lambda X_1)\dots\exp(\lambda X_n)) = E(\exp(\lambda X_1))\dots E(\exp(\lambda(X_n)).$$
Mais, pour tout k, on a :
$$E(\exp(\lambda(X_k)) = (1-p)\exp(\lambda.0) + p\exp(\lambda.1),$$
d'où le résultat attendu.
4. On a
$$P(X=0 \text{ et } X_1=1) = P(\emptyset) = 0, \quad P(X=0) = (1-p)^n, \quad P(X_1=1) = p.$$
Si $p \in]0,1[$, on a $(1-p)^n p \neq 0$, ce qui entraine $P(X=0 \text{ et } X_1=1) \neq P(X=0)P(X_1=1)$. Les deux évènements $\{X=0\}$ et $\{X_1=1\}$ ne sont donc pas indépendants. Par conséquent les deux v.a. X et X_1 ne sont pas indépendantes.
Si par contre $p=0$ ou $p=1$ alors les v.a. X et X_1 sont constantes (avec probabilité 1). On peut alors vérifier que les v.a. sont indépendantes. (Ce n'est pas un cas très intéressant)

Exercice 2 : Soit $(G_k)_k$ une suite de v.a. indépendantes. On suppose, pour tout k :
$$P(G_k=4) = \frac{2}{6}, \quad P(G_k=-1) = \frac{1}{6}, \quad P(G_k=-2) = \frac{3}{6}.$$
La valeur de la v.a. G_k modélise notre gain au k^{eme} lancer.

Notons n le nombre de lancers. Le gain total après n parties est ainsi $G_1+\cdots+G_n$. On suppose que n est suffisament grand (on joue toute la nuit) pour justifier l'approximation suivante :
$$G_1 + \cdots + G_n \approx nE(G_1).$$
Or
$$E(G_1) = 4\frac{2}{6} - \frac{1}{6} - 2\frac{3}{6} = \frac{1}{6}.$$

Ainsi le gain espéré après n parties est positif. Il est donc intéressant de jouer.

Remarque : le point important est que c'est le signe des espérances communes des v.a. G_k qui intervient (je donnais la plupart des points pour l'introduction d'une v.a. donnant le gain d'une partie, le calcul de son espérance et la conclusion directe à partir de son signe). La comparaison de $P(G_k < 0)$ et de $P(G_k > 0)$ n'est pas pertinente pour ce problème.

Exercice 3 : Cela ne change rien pour notre problème de supposer que Alice et Bob jouent cinq manches, même si le résultat des trois ou quatre premières suffit pour déterminer le gagnant. Le gagnant est alors celui qui a gagné trois, quatre ou cinq manche. Le nombre de manches gagnées par Alice suit une loi binomiale de paramètres 5 et p. La probabilité qu'Alice gagne est donc :

$$\binom{5}{3} p^3(1-p)^2 + \binom{5}{4} p^4(1-p) + \binom{5}{5} p^5$$

i.e.

$$10p^3(1-p)^2 + 5p^4(1-p) + p^5.$$

Remarque : on peut s'y prendre différement, en distinguant suivant les cas où on sait qu'Alice a gagné après trois, quatre ou cinq manches. Il faut alors veiller à ne pas compter plusieurs fois le même cas. Par exemple, savoir après la quatrième manche que Alice gagne signifie que Alice a perdu l'une des *trois* premières manches et qu'elle a gagné les autres. On obtient par ce raisonnement :

$$p^3 + \binom{3}{1} p^3(1-p) + \binom{4}{2} p^3(1-p)^2$$

i.e.

$$p^3 + 3p^3(1-p) + 6p^3(1-p)^2.$$

(C'est bien sûr le même résultat que par la première méthode.)

Exercice 4 :

1. Notons A_1 l'évènement considéré. On a :

$$P(A_1) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{10} = \frac{3}{10}.$$

   Le premier terme du membre de droite correspond au produit de la probabilité de choisir la pièce équilibrée par la probabilité d'obtenir pile sachant qu'on utlise la pièce équilibrée.

2. On s'intéresse ici au complémentaire de l'évènement A_1. On a :

$$P(\Omega \setminus A_1) = 1 - P(A_1) = \frac{7}{10}.$$

3. Notons A_3 l'évènement considéré. On a :

$$P(A_3) = \frac{1}{2}\left(2\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(2\frac{1}{10}\frac{9}{10}\right).$$

Le deuxième facteur du deuxième terme du membre de droite est la probabilité qu'une v.a. de loi binomiale de paramètres 2 et 1/10 vaille 1. C'est la probabilité d'obtenir exactement un pile en lançant deux fois la pièce pipée.
On obtient :
$$P(A_3) = \frac{17}{50}.$$
Remarque. Une erreur fréquente a été de considérer que la probabilité était donnée par $2P(A_1)P(A_2)$. Cette dernière quantité est la probabilité de l'évènement suivant : "on choisit l'une des deux pièces au hasard puis on la lance ; on répète cette expérience (en particulier on choisit à nouveau une pièce au hasard) ; entre les deux lancers on a obtenu exactement une fois pile".

4. Notons H l'évènement "la pièce choisie est la pièce equilibrée". On s'intéresse à la probabilité conditionnelle $P(H|A_1)$. On a :
$$P(H|A_1) = \frac{P(H \cap A_1)}{P(A_1)} = \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}{\frac{3}{10}} = \frac{5}{6}.$$
5. On a :
$$P(H|A_3) = \frac{P(H \cap A_3)}{P(A_3)} = \frac{\frac{1}{2}\left(2\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right)}{\frac{17}{50}} = \frac{25}{34}.$$
6. Notons A_6 l'évènement "on obtient pile au troisième lancer". On a :
$$P(A_6|A_3) = \frac{P(A_6 \cap A_3)}{P(A_3)} = \frac{\frac{1}{2}\left(2\frac{1}{2}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(2\frac{1}{10}\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{10}\right)}{\frac{17}{50}} = \frac{67}{170}.$$
Remarque : une erreur fréquente a été de considérer (à tort) que les évènements A_3 et A_6 étaient indépendants. La non indépendance est suggérée par la question précédente qui nous indique que, conditionnellement à A_3, la probabilité que la pièce choisie soit équilibrée est strictement supérieure à 1/2.

Exercice 5 :

1. Choisissons $f : \{1, \ldots, 6\} \to \{0, 1\}$ définie par $f(1) = f(2) = 1$ et $f(3) = f(4) = f(5) = f(6) = 0$. Alors, $f(X)$ (qui est un abus de notation pour $f \circ X$) est une v.a. qui vaut 0 ou 1 et on a $P(f(X) = 1) = P(X = 1 \text{ ou } X = 2) = 2/6 = 1/3$. Ainsi $f(X)$ est une variable aléatoire de loi de Bernoulli de paramètre 1/3.
2. On lance le dé ; si le dé a donné 1, 2 ou 3 on renvoie 0 ; sinon on renvoie 1. Pour justifier cette méthode de simulation, il suffit de reprendre la démarche de la question précédente en remplaçant la fonction f par la fonction $g : \{1, \ldots, 6\} \to \{0, 1\}$ définie par $g(1) = g(2) = g(3) = 1$ et $g(4) = g(5) = g(6) = 0$.
3. On lance deux dés ; si le résultat du premier dé est 1 et si le résultat du deuxième est 1, 2, 3, 4 ou 5 on renvoie 1 ; sinon on renvoie 0.
Justifions-le ainsi. Soient X et Y deux v.a. indépendantes de loi uniforme sur $\{1, \ldots, 6\}$. Soit $h : \{1, \ldots, 6\}^2 \to \{0, 1\}$ définie par $h(1, 1) = \cdots = h(1, 5) = 1$ et h nulle ailleurs. Alors $h(X, Y)$ est une variable aléatoire valant 0 ou 1 et on a bien $P(h(X, Y) = 1) = P(X = 1 \text{ et } Y \in \{1, \ldots, 5\}) = P(X = 1)P(Y \in \{1, \ldots, 5\}) = 5/36$ (on a utilisé l'indépendance de X et Y dans l'avant dernière inégalité).

4. On peut par exemple lancer le dé jusqu'à obtenir 1, 2, 3, 4 ou 5 et renvoyer le résultat ainsi obtenu.
5. On peut par exemple lancer le dé jusqu'à obtenir 1, 2, 3, 4 ou 5 et renvoyer 1 si le résultat est 1, 0 sinon.
6. On peut par exemple lancer deux dés jusqu'à ce que le premier donne 1 ou que le premier donne 2 et le deuxième $1, 2, 3, 4$ ou 5. Si a est le résultat du premier dé et b le résultat du deuxième, on renvoie alors $6a + b - 5$ (au -5 près, on pense au résultat des deux dés comme à l'écriture en base 6 d'un nombre ; tout cela serait plus intuitif avec deux dés à 10 faces numérotées de 0 à 9).