Probabilités - L2 - 2007/2008 - Examen

Cours :

1. Soit Ω un univers. On note $\mathcal{F}$ la tribu sur Ω constituée de l'ensemble des parties de Ω. Qu'est-ce qu'une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$?
2. Soit E un ensemble à p éléments et F un ensemble à n éléments. Donner
   (a) Le nombre d'applications de E dans F.
   (b) Le nombre d'applications injectives de E dans F.
   (c) Le nombre de parties de E qui peuvent être en bijection avec F.

Exercice 1 : On évitera les excès de formalisme dans cet exercice. Je dois néanmoins pouvoir comprendre facilement et précisément comment vous procédez. Une armoire contient trois boites d'aspect extérieur identique.

- L'une des boite contient trois boules rouges et une boule noire.
- Une autre boite contient trois boules jaunes et une boule noire.
- La dernière boite contient une boule rouge, une boule jaune et deux boules noires.

1. Vous choisissez (au hasard et de manière uniforme) l'une des boites. Vous tirez une boule. Quelle est la probabilité qu'elle soit rouge ?
2. Vous tirez une nouvelle boule de cette même boite, sans avoir remis la boule précédente. Quelle est la probabilité que les deux boules que vous avez tirées soient de la même couleur ?
3. Vous vous apprêtez à tirer une troisième boule de la boite (toujours sans remise). Si les deux boules déjà tirées sont de la même couleur, quelle est la probabilité que la troisième boule tirée soit noire ?
4. Vous venez de tirer la troisième boule. Si les trois boules ainsi tirées sont de la même couleur, quelle est la probabilité que la boule restant dans la boite soit noire ?

Exercice 2 :

1. Un avion possède 3 réacteurs identiques. Il est capable de voler si au moins la moitié (2 ou 3) de ses réacteurs fonctionnent. On suppose que chacun de ses réacteurs fonctionne ou non indépendamment des autres. On note p la probabilité (commune à chacun des réacteurs) qu'un réacteur donné fonctionne. On désigne enfin par $a(p)$ la probabilité que l'avion soit capable de voler. Expliciter $a(p)$.
2. Même question avec un avion possédant 5 réacteurs. (Il vole cette fois-ci si 3, 4 ou 5 de ses réacteurs fonctionnent.) On note $b(p)$ la probabilité qui nous intéresse.
3. Que valent $a(1/2)$ et $b(1/2)$? Comment retrouver ces résultats sans gros calculs ?
4. On se demande, suivant la valeur de p, s'il vaut mieux se trouver dans le premier avion ou dans le deuxième. Pour répondre à cette question, on propose la méthode suivante. Soient $X_1, \ldots, X_5$ des variables aléatoires indépendantes de loi Bernoulli de paramètre p. On note A l'évènement $\{X_1 + X_2 + X_3 \geq 2\}$ et B l'évènement $\{X_1 + \cdots + X_5 \geq 3\}$.

(a) Expliciter $P(A \setminus B)$ et $P(B \setminus A)$. (On rappelle que le symbole $\setminus$ désigne la différence ensembliste. Ainsi $A \setminus B$ désigne l'ensemble des éléments de A n'appartenant pas à B.)

(b) Exprimer $a(p) - b(p)$ en fonction de $P(A \setminus B)$ et $P(B \setminus A)$.

(c) Conclure.

Exercice 3 : Soit X une variable aléatoire discrète. Soient f et g deux applications bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f et g sont croissantes. L'objectif est d'établir l'inégalité suivante :

$$E(f(X)g(X)) \geq E(f(X))E(g(X)).$$

1. Soit Y une variable aléatoire discrète indépendante de X et de même loi que X. Établir l'inégalité suivante :

$$(f(X) - f(Y))(g(X) - g(Y)) \geq 0.$$

2. En déduire le signe de

$$E\big((f(X) - f(Y))(g(X) - g(Y))\big)$$

3. Développer l'expression précédente et conclure.
4. Quel résultat aurait-on obtenu si on avait supposé f et g décroissantes ?