## L3 - Intégration II - TD4

**Exercice 1.** Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$.

1. Montrer $f * g = g * f$.
2. On suppose que $f$ et $g$ sont paires ou impaires. Discuter de la parité de $f * g$.
3. On suppose que $f$ est nulle en dehors d'un segment $[-A, A]$ et que $g$ est nulle en dehors d'un segment $[-B, B]$. Montrer que $f * g$ est nulle en dehors d'un segment que l'on précisera.

**Exercice 2.**

1. Expliciter $1_{[-1,1]} * 1_{[-1,1]}$.
2. Expliciter $1_{[-1,1]} * \cos$.

**Exercice 3.** Montrer que le produit de convolution sur $L^1(\mathbb{R})$ est associatif.

**Exercice 4.** Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Soit $\phi \in L^\infty(\mathbb{R})$. Montrer

$$\int f * g(x)\phi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^2} f(u)g(v)\phi(u+v)dudv.$$

Utiliser ce point de vue pour retrouver les propriétés de commutativité et d'associativité du produit de convolution.

**Exercice 5.** Montrer que la convolution est une application bilinéaire symétrique et continue de $L^1(\mathbb{R}) \times L^1(\mathbb{R})$ dans $L^1(\mathbb{R})$.

**Exercice 6.**

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue. Montrer que $f * 1_{[-1,1]}$ est de classe $C^1$ et expliciter sa dérivée.
2. Montrer que $1_{[-1,1]} * 1_{[-1,1]} * 1_{[-1,1]}$ est de classe $C^1$. (On ne demande pas d'expliciter cette application.)

**Exercice 7.**

1. On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = \exp(-1/x)$ si $x > 0$ et $f(x) = 0$ sinon. Montrer que $f$ est indéfiniment dérivable.
2. En déduire l'existence d'une application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ indéfiniment dérivable telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \neq 0$ si et seulement si $|x| < 1$.
3. En déduire également l'existence d'une application de $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ indéfiniment dérivable telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $h(x) \neq 0$ si et seulement si $\|x\| < 1$.

**Exercice 8.**

1. Soit $f \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. A-t-on $\|f - f(\cdot - 1/n)\|_2 \to 0$ ?
2. Même question si $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.