L3 - Intégration II - TD3

Exercice 1. Calculer les intégrales suivantes.

1. $$\int_A xy\,dxdy \text{ où } A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ :\ 0\le x\le 2 \ ,\ 0\le y\le 2x-x^2\}.$$

2. $$\int_B \frac{x}{1+y}\,dxdy \text{ où } B = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ :\ 0\le y\le 1 \ ,\ y\le x\le \sqrt{y}\}.$$

3. $$\int_T e^{y^2}\,dxdy \quad \text{où } T \text{ est le triangle de } \mathbb{R}^2 \text{ de sommets } (0,0),\ (0,1) \text{ et } (2,1).$$

Exercice 2. Calculer les intégrales suivantes.

1. $$\int_S \frac{y}{x^2+y^2}\,dxdy \text{ où } S = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ :\ y\ge 0 \ ,\ 1\le x^2+y^2\le 4\}.$$

2. $$\int_D \sqrt{x^2+y^2}^{\,\alpha}\,dxdy$$
   où D est le disque unité de $\mathbb{R}^2$ centré en 0 et où α est un réel.

3. $$\int_D (ax+by+c)\,dxdy.$$
   où D est un disque de $\mathbb{R}^2$ dont on note (x_0,y_0) le centre et $r>0$ le rayon et où a,b et c sont trois réels.

4. $$\int_T e^{\frac{x-y}{x+y}}\,dxdy$$
   où T est le triangle de $\mathbb{R}^2$ de sommets $(0,0)$, $(1,0)$ et $(0,1)$.

5. $$\int_I \frac{1}{xy}\,dxdy \quad \text{où } I = \{(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2 \ :\ \frac{1}{a}\le x+y\le a \ ,\ \frac{1}{b}\le \frac{y}{x}\le b\}.$$
   et où a et b sont deux réels strictement supérieurs à 1.

Exercice 3. Calculer les intégrales suivantes.

1. $$\int_B (x^2-z^2)\,dxdydz \text{ où } B \text{ est la boule unité de } \mathbb{R}^3 \text{ centrée en } 0.$$

2. $$\int_S z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz \quad \text{où } S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ :\ z\ge 0 \ ,\ x^2+y^2+z^2\le 1\}.$$

Exercice 4. L'intégrale

$$\int_T \frac{e^{-xy}}{x}\,dxdy \qquad \text{où } T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x > 0\,,\ 0 < y < x\}.$$

est-elle finie ?

Exercice 5. Soit $d \geq 1$. Pour tout $r > 0$, on note $V(r)$ la mesure de Lebesgue de la boule de $\mathbb{R}^d$ de rayon r centrée en l'origine. Montrer, pour tout $r > 0$, l'égalité

$$V(r) = r^d V(1).$$

Exercice 6.

1. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré. On suppose que μ est $\sigma-$finie. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}_+$ une application mesurable. Montrer l'égalité

$$\int_\Omega f(x)\,\mu(dx) = \int_0^{+\infty} \mu(\{x \in \Omega : f(x) \geq t\})\,dt.$$

2. Soient X et Y deux variables aléatoires positives. On suppose, pour tout réel t, $P(X \geq t) \geq P(Y \geq t)$. Comparer les espérances de X et de Y. Plus généralement, comparer $E(X^n)$ et $E(Y^n)$ pour $n \geq 1$.
3. On note B la boule unité de $\mathbb{R}^d$ centrée en 0, où $d \geq 1$ est un entier. Pour quels valeurs du réel α l'intégrale

$$\int_B \frac{1}{\|x\|^\alpha} dx$$

est-elle finie ? Même question en remplaçant B par $\mathbb{R}^d \setminus B$.

Exercice 7. Soient U et V deux ouverts non vides de $\mathbb{R}^d$. Soit ϕ un difféomorphisme de U sur V. Soit f une application mesurable de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}_+$. On considère la mesure μ sur $\mathbb{R}^d$ définie par $\mu(dx) = f(x)1_U(x)dx$. Montrer que l'image de μ par ϕ admet une densité contre la mesure de Lebesgue et expliciter cette densité.