L3 - Intégration II - TD2

Exercice 1. Soit $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = 1/\sqrt{x}$. Pour quelles valeurs de $p \in [1,+\infty]$ a-t-on $f \in L^p([1,+\infty[)$? Calculer dans ce cas $\|f\|_p$.

Exercice 2. Soit $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = 1/\sqrt{x}$. Pour quelles valeurs de $p \in [1,+\infty]$ a-t-on $f \in L^p(]0,1])$? Calculer dans ce cas $\|f\|_p$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{Z}$ et $f(x) = x$ sinon. Pour quelles valeurs de $p \in [1,+\infty]$ a-t-on $f \in L^p([1,+\infty])$? Calculer dans ce cas $\|f\|_p$.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|} + \cos(x+1)\sin(x+2) + 3}.$$

Pour quelles valeurs de $p \in [1,+\infty]$ a-t-on $f \in L^p(\mathbb{R})$?

Exercice 5. Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x) = \frac{1}{(x + |\ln(x)|)^{1/3}}.$$

Pour quelle valeurs de $p \in [1,+\infty]$ a-t-on $f \in L^p(]0,+\infty[)$?

Exercice 6. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Pour tout $f \in L^2([0,1])$ et tout $g \in L^2([0,1])$, $fg \in L^2([0,1])$.
2. Pour tout $f \in L^2([0,1])$ et tout $g \in L^2([0,1])$, $fg \in L^1([0,1])$.
3. Pour tout $f \in L^1([0,1])$ et tout $g \in L^\infty([0,1])$, $fg \in L^1([0,1])$.
4. Pour tout $f \in L^1([0,1])$ et tout $g \in L^\infty([0,1])$, $fg \in L^\infty([0,1])$.

Exercice 7.

1. Soient $1 \leq a < b \leq +\infty$. Montrer que $L^b(]0,1[)$ est strictement inclus dans $L^a(]0,1[)$.
2. Que se passe-t-il si on remplace $]0,1[$ par $[-10,10]$?
3. Que se passe-t-il si on remplace $]0,1[$ par $\mathbb{R}$?

Exercice 8. On se place sur un espace mesuré $(X,\mathcal{F},\mu)$. Soit $f : X \to \mathbb{R}$.

1. Soit $1 \leq p \leq +\infty$. On suppose $f \in L^1$ et $f \in L^\infty$. Montrer $f \in L^p$.
2. Soit $1 \leq a \leq p \leq b \leq +\infty$. On suppose maintenant $f \in L^a$ et $f \in L^b$. Montrer $f \in L^p$. Indication : inégalité de Hölder.

Exercice 9. On se place sur un espace mesuré $(X,\mathcal{F},\mu)$. Soient $1 \leq p,q,r \leq +\infty$ tels que

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

Soient $f,g : X \to \mathbb{R}$. On suppose $f \in L^p$ et $g \in L^q$. Montrer $fg \in L^r$ et

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Indication : inégalité de Hölder.

Exercice 10. On considère les suites d'applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$f_n(x) = (\sin(x))^n 1_{]-4,4[}(x), g_n(x) = \frac{1}{n} 1_{]-n^2,n^2[}(x) \text{ et } h_n(x) = \sqrt{n} 1_{]\frac{1}{n+3},\frac{1}{n}[}(x)$$

1. Étudier la convergence presque partout.
2. Soit $p \in [1, +\infty]$. Étudier la convergence dans L^p.

Exercice 11. On se place sur un espace mesuré $(X, \mathcal{F}, \mu)$. Soient $p \in [1, +\infty[$ et $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de $L^p(\mu)$ qui converge μ-presque partout vers une application mesurable $f : X \to \mathbb{R}$. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

$$(A) \quad \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0 \qquad ; \qquad (B) \quad f \in L^p(\mu) \text{ et } \quad \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_p = \|f\|_p$$

Indication. Pour l'implication $(B) \Rightarrow (A)$, appliquer le lemme de Fatou à la suite $g_n = 2^p(|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p$.

Exercice 12. Soit $p \in [1, +\infty]$.

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer
$$\max(a, b) = \frac{a + b + |a - b|}{2}.$$
2. Soient $f, g \in L^p(\mathbb{R})$. Montrer que $h := \max(f, g) \in L^p(\mathbb{R})$.
3. Soient $(f_n)_n, (g_n)_n$ deux suites de $L^p(\mathbb{R})$ telles que
$$f_n \to f \quad \text{ et } g_n \to g \text{ dans } L^p(\mathbb{R}).$$
On définit une suite $(h_n)_n$ par $h_n := \max(f_n, g_n)$. Montrer
$$h_n \to h \text{ dans } L^p(\mathbb{R}).$$

Exercice 13. Soient $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré, $p \in [1, +\infty]$ et q l'exposant conjugué. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ (resp. $(g_n)_{n\geq 1}$) une suite de $L^p(\mu)$ (resp. $L^q(\mu)$) convergent vers f (resp. g) dans $L^p(\mu)$ (resp. $L^q(\mu)$). Montrer que la suite $(f_n g_n)_{n\geq 1}$ converge vers fg dans $L^1(\mu)$.

Exercice 14. On se place sur un espace mesuré $(X, \mathcal{F}, \mu)$. On suppose $\mu(X)$ fini. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite d'applications mesurables de X dans $\mathbb{R}$. Soit f une application mesurable de X dans $\mathbb{R}$.

1. On suppose que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f. Montrer, pour tout $p \in [1, +\infty[$,
$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|^p d\mu = 0$$
2. Donner un exemple où la réciproque est fausse.