## L3 - Intégration II - TD1

**Exercice 1.** On considère, pour tout entier $n \geq 1$, l'application $f_n : [0,1]$ définie par

$$f_n(x) = \max(n - n^2 x, 0).$$

1. Montrer qu'il existe une application $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que, pour presque tout $x \in [0,1]$, on a
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$
2. Les applications $f_n$ sont-elles intégrables ? L'application $f$ est-elle intégrable ?
3. A-t-on
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n = \int_0^1 f\,?$$
4. Les théorèmes de convergence monotone et dominée s'appliquent-ils ici ?

**Exercice 2.** On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,t) = \begin{cases} \frac{|t|-|x|}{t^2} & \text{si } |x| < |t| \\ 0 & \text{si } |x| \geq |t|. \end{cases}$$

1. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'application $f(\cdot, t)$ est intégrable.
2. On considère alors l'application $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$F(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x,t)dx.$$
3. L'application $F$ est-elle continue ?
4. Les théorèmes de convergence monotone et dominée s'appliquent-ils ici ?

**Exercice 3 (fonction gamma).** On considère l'application $\Gamma : ]0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ définie par

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx.$$

1. Montrer que $\Gamma$ est bien définie.
2. Montrer que $\Gamma$ est indéfiniment dérivable et expliciter ses dérivées.

**Exercice 4.** On admet

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}.$$

L'objectif de cet exercice est de montrer, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{itx} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi} e^{-t^2/2}.$$

On introduit pour cela l'application $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par

$$\phi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} e^{-x^2/2} dx.$$

1. Montrer que $\phi$ est bien définie.

2. Montrer, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\phi(t) = \int_{\mathbb{R}} \cos(tx) e^{-x^2/2}.$$
En particulier, $\phi$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $\phi$ est dérivable et expliciter sa dérivée.
4. Montrer, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\phi'(t) = -t\phi(t).$$
5. En déduire que l'application $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\psi(t) = \phi(t)e^{t^2/2}$ est constante.
6. Conclure.

**Exercice 5.** On admet
$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}.$$
L'objectif est de montrer, pour tout $t \geq 0$,
$$\int_0^{+\infty} \exp\left(-x^2 - \frac{t^2}{x^2}\right) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2t}.$$

1. Montrer que, pour tout $t \geq 0$, l'intégrale est bien définie. On définit une application $F : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ par
$$F(t) = \int_0^{+\infty} \exp\left(-x^2 - \frac{t^2}{x^2}\right) dx.$$
2. Montrer que $F(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
3. Montrer que $F$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et expliciter sa dérivée (on pourra par exemple montrer qu'il existe $M$ tel que, pour tout $u \geq 0$, $ue^{-u} \leq M$.)
4. Montrer que $F' = -2F$.
5. Conclure.

**Exercice 6.** L'objectif est d'expliciter, pour tout réel $t$, $\int_0^{+\infty} e^{-x} \frac{\sin(xt)}{x} dx$.

1. Montrer que l'on peut définir une application $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par
$$F(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x} \frac{\sin(xt)}{x} dx.$$
2. Montrer que $F$ est dérivable et expliciter sa dérivée.
3. Conclure.

**Exercice 7.** Soit $\mu$ une mesure finie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

1. Montrer que l'on peut définir une application $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par
$$\phi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \mu(dx).$$
2. Soit $n \geq 1$ un entier. On suppose que l'intégrale
$$\int_{\mathbb{R}} |x|^n \mu(dx)$$
est finie. Montrer que $\phi$ est de classe $C^n$ et expliciter ses dérivées.
3. Montrer que l'application $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$\psi(t) = \int_0^{+\infty} e^{itx - x^6} dx$$
est indéfiniment dérivable et expliciter ses dérivées.