Intégration - 2020/2021 - CC1

Remarques.

— Sauf mention du contraire, nous attendons une rédaction claire et concise d'une démonstration à chaque question. Nous rappelons que votre copie n'est pas votre brouillon. Privilégiez la qualité (rigueur, introduction des variables, clarté, concision etc.) à la quantité.

— Sauf mention du contraire, les intervalles de $\mathbb{R}$ sont munis de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue.

— En dehors des questions où il est explicitement demandé d'établir la mesurabilité d'un ensemble ou d'une application, les propriétés de mesurabilités nécessaires au cours de la preuve seront admises.

Exercice 1 (Cours).

1. Donner la définition d'une tribu $\mathcal{A}$ sur un ensemble X.
2. On se place sur l'espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Soit f une application de X dans $\mathbb{R}$. Donner la définition de « f est intégrable ».

Exercice 2 (Questions rapides). On demande ici de redémontrer quelques résultats classiques. Les résultats de ce type peuvent être utilisés sans justifications dans le reste de l'examen.

1. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une application intégrable. Montrer
$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,+\infty[} \mathbb{1}_{[0,n]}(x) f(x) \mathrm{d}x = \int_{[0,+\infty[} f(x) \mathrm{d}x.$$
2. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite d'applications mesurables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. L'ensemble
$$A = \{x \in \mathbb{R} : \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, f_n(x) > 0\}$$
est-il mesurable ?
3. On note λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que si A et B sont deux boréliens de $\mathbb{R}$ tels que $A \subset B$, on a $\lambda(A) \leq \lambda(B)$.
   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$. En utilisant la question précédente et le fait que, pour tous réels $a < b$,
   $$\lambda(]a, b[) = b - a,$$
   montrer $\lambda(\{x\}) = 0$.
   (c) Montrer que $\lambda(\mathbb{N}) = 0$.
4. Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $(B_n)_n$ une suite de parties de $\mathbb{R}$. Montrer
$$A \cap \bigcup_n B_n = \bigcup_n (A \cap B_n).$$

Exercice 3 (Intégrabilité). On considère les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\pi} \exp(x + \sqrt{x}) \mathrm{d}x, \qquad J = \int_0^{+\infty} \frac{|\sin(x)| \exp(-x)}{2 + \sin(x)} \mathrm{d}x,$$
$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} x^{102} \mathrm{d}x, \qquad L = \int_0^1 \frac{\cos(x)}{x^{1/3}} \mathrm{d}x.$$

1. Pourquoi toutes ces intégrales ont-elles un sens ? On attend une réponse très concise en une ou deux lignes.
2. Lesquelles sont finies ? On attend une réponse détaillée pour chaque intégrale. On ne demande pas de calculer ces intégrales.

Exercice 4 (Convergence de suites d'intégrales). Pour tout $n \geq 1$ on considère les applications $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ et $h_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définies par

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + x^4 + x^n}, \qquad g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx) \frac{x^k}{k!} \qquad \text{et} \qquad h_n(x) = \cos\left(\frac{x}{n^2}\right)\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-4x}.$$

On considère également les suites $(u_n)_{n\geq 1}$, $(v_n)_{n\geq 1}$ et $(w_n)_{n\geq 1}$ définies par

$$u_n = \int_{[0,+\infty[} f_n(x)\mathrm{d}x, \qquad v_n = \int_{[0,1]} g_n(x)\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad w_n = \int_{[0,+\infty[} h_n(x)\mathrm{d}x.$$

(Attention, il y a deux intégrales sur $[0, +\infty[$ et une intégrale sur $[0, 1]$.)

1. Montrer que $(u_n)_n$ converge vers une limite que l'on écrira sous la forme d'une intégrale qu'on ne demande pas de calculer. La limite est-elle finie ?
2. Montrer que g_n converge simplement vers une application que l'on explicitera (sans utiliser de symbole $\sum$, lim, ...). Montrer que $(v_n)_n$ converge vers une limite que l'on écrira sous la forme d'une intégrale qu'on ne demande pas de calculer. La limite est-elle finie ?
3. Montrer que $(w_n)_n$ converge et expliciter la limite. On pourra commencer par montrer, pour tout $x \geq 0$,
$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq e^x.$$

Exercice 5 (Mesurabilité). Si f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et si A est une partie de $\mathbb{R}$, on note f_A la restriction de f à A. Si $\mathcal{T}$ est une tribu sur $\mathbb{R}$ et si A est une partie de $\mathbb{R}$ on pose

$$\mathcal{T}_A = \{T \cap A : \ T \in \mathcal{T}\}.$$

On fixe dans la suite une tribu $\mathcal{T}$ sur $\mathbb{R}$ et une partie A de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $\mathcal{T}_A$ est une tribu sur A.
2. Soit $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \to \mathbb{R}$ une application mesurable. Montrer que f_A est une application mesurable de $(A, \mathcal{T}_A)$ dans $\mathbb{R}$.
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. On suppose $A \in \mathcal{T}$. On pose $B = \mathbb{R} \setminus A$. On suppose que f_A est une application mesurable de $(A, \mathcal{T}_A)$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f_B est une application mesurable de $(B, \mathcal{T}_B)$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est une application mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une application continue et bornée. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1 + n^2x^2}\mathrm{d}x.$$

1. Soit $n \geq 1$. Montrer que l'intégrale I_n a un sens et que l'on a
$$\int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1 + n^2x^2}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{f(\frac{y}{n})}{1 + y^2}\mathrm{d}y.$$
2. La suite $(I_n)_n$ converge-t-elle ? Si oui quelle est la limite ?

Exercice 7.

1. Montrer qu'il existe une suite d'applications continues $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}_+$ satisfaisant les deux propriétés suivantes :
   (i) Pour tout $x \in [0, 1]$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.
   (ii) La suite définie par $I_n = \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$ ne converge pas vers 0.
   On pourra construire un contre-exemple pour lequel $I_n = 1$ pour tout n en se souvenant que les fonctions les plus simples sont les fonctions affines par morceaux et que moins il y a de morceaux...
2. Existe-t-il une suite d'applications continues $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}_+$ satisfaisant les deux propriétés suivantes ?
   (i) Pour tout $x \in [0, 1]$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.
   (iii) La suite définie par $I_n = \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$ tend vers $+\infty$.