Intégration - 2019/2020 - CC1

Remarques.

- Sauf mention du contraire, j'attends une rédaction claire et concise d'une démonstration à chaque question. Je rappelle que votre copie n'est pas votre brouillon. Je me réserve la possibilité de ne pas lire la fin de la réponse à une question si le début est incompréhensible. Privilégiez la qualité (rigueur, introduction des variables, clarté, concision etc.) à la quantité.
- Sauf mention du contraire, les intervalles de $\mathbb{R}$ sont munis de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue.
- En dehors des questions où il est explicitement demandé d'établir la mesurabilité d'un ensemble ou d'une application, les propriétés de mesurabilités nécessaires au cours de la preuve seront admises.

Exercice 1 (Cours).

1. Donner la définition d'une mesure μ sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$.
2. On se place sur l'espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Soit f une application de X dans $\mathbb{R}$. Donner la définition de « f est intégrable ».

Exercice 2. On demande dans cet exercice de démontrer des résultats proches de résultats énoncés en cours ou en séances de travaux dirigés. Les résultats de ce type peuvent être utilisés sans démonstrations dans les autres exercices.

1. Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ une application mesurable et positive. Montrer
$$\int_{[1,+\infty[} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{[1,n]} f(x)dx.$$
2. Soit $g : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = 1/x^2$. Montrer que g est intégrable et expliciter son intégrale.
3. Soient $f, g : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ deux applications. On fait les hypothèses suivantes :
   (a) L'application f est mesurable.
   (b) L'application g est mesurable, positive et, pour tout $M \geq 1$, on a
   $$\int_{[M,+\infty[} g(x)dx = +\infty.$$
   (c) $f(x) \sim g(x)$ lorsque $x \to \infty$.

   Montrer que f n'est pas intégrable.

Exercice 3 (Questions rapides).

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = x^3$. L'application f est-elle intégrable ?
2. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite d'applications mesurables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. L'ensemble
$$A = \{x \in \mathbb{R} : \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, f_n(x) > 0\}$$
est-il mesurable ?

Exercice 4. Pour tout $n \geq 1$ on considère les applications f_n, g_n et h_n de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$f_n(x) = \cos(x)e^{-nx},\ g_n(x) = \frac{1+nx}{(1+x)^n}e^{-x} \text{ et } h_n(x) = \frac{1}{1+x^2}\exp\left(\frac{n^2x^2}{(1+x)^n}\right).$$

On considère également les suites $(u_n)_{n\geq 1}$, $(v_n)_{n\geq 1}$ et $(w_n)_{n\geq 1}$ définies par

$$u_n = \int_{[0,+\infty[} f_n(x)dx,\ v_n = \int_{[0,+\infty[} g_n(x)dx \text{ et } w_n = \int_{[0,+\infty[} h_n(x)dx.$$

1. Montrer que (u_n) converge et expliciter sa limite.
2. La suite $(v_n)_n$ converge-t-elle ? Si oui, expliciter sa limite. Pour majorer g_n on pourra considérer le développement de $(1+x)^n$.
3. La suite $(w_n)_n$ converge-t-elle ? Si oui, expliciter sa limite.

Exercice 5. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une application intégrable. On suppose qu'elle est dérivable en 0 et on suppose $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$u_n = \int_{[0,1]} nf\left(\frac{x}{n}\right)dx$$

converge-t-elle ? Si oui, quelle est sa limite ?

Exercice 6. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$.

1. On pose
$$\mathcal{S} = \{A \subset \mathbb{R} : \forall y \in A, \forall n \in \mathbb{Z}, y + n \in A\}.$$
   (a) A-t-on $[0, 1] \in \mathcal{S}$?
   (b) A-t-on $\mathbb{Z} \in \mathcal{S}$?
   (c) Montrer que $\mathcal{S}$ est une tribu sur $\mathbb{R}$.
   (d) Les propriétés suivantes sont-elles vraies ?
      i. Pour toute application $f : (\mathbb{R}, \mathcal{S}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{P})$, si f est 1-périodique alors f est mesurable.
      ii. Pour toute application $f : (\mathbb{R}, \mathcal{S}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{P})$, si f est mesurable alors f est 1-périodique.
2. On pose
$$\mathcal{T} = \{A \subset \mathbb{R} : \forall y \in A, \forall n \in \mathbb{N}, y + n \in A\}.$$
L'ensemble $\mathcal{T}$ est-il une tribu sur $\mathbb{R}$? Si ce n'est pas le cas, la tribu engendrée $\sigma(\mathcal{T})$ est-elle égale à $\mathcal{S}$?
3. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. On pose
$$\mathcal{V} = \{A \subset \mathbb{R} : \forall y \in A, \varphi(y) \in A\}.$$
Montrer que $\mathcal{V}$ est une tribu sur $\mathbb{R}$ si et seulement si
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \varphi(x) = y \implies \exists n \geq 0 : \varphi^{(n)}(y) = x \tag{1}$$
où $\varphi^{(n)}$ désigne la composée $n^{\text{ième}}$ de φ avec elle-même (par exemple $\varphi^{(3)} = \varphi \circ \varphi \circ \varphi$).