$F^-(U)$ et $F(X)$

v0 février 2017 / non relue sérieusement

1 $F^-(U)$: représentation de Skorokhod

Un cas simple. Soit $F : \mathbb{R} \to]0,1[$ un homéomorphisme croissant. C'est la fonction de répartition d'une certaine loi μ. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$. Alors $F^{-1}(U)$ est une variable aléatoire de loi μ. Notons tout d'abord que U appartient à $]0,1[$ presque sûrement. Prouvons maintenant le résultat annoncé. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$P(F^{-1}(U) \leq x) = P(U \leq F(x)) = F(x).$$

Cela conclut la preuve.

Le cas général. Le cas simple précédent exclu de nombreux cas très classiques : cas où μ possède des atomes, cas où $\mu(I) = 0$ pour un intervalle non trivial I, ... Le cas simple s'adapte au cas le plus général en remplaçant la réciproque F^{-1} par une pseudo-réciproque que nous noterons F^-. Soit F la fonction de répartition d'une mesure de probabilité μ sur $\mathbb{R}$. Soit $F^- :]0,1[\to \mathbb{R}$ définie par

$$F^-(p) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq p\}.$$

Notons que l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq p\}$ est non vide et minorée. La définition précédente a donc bien un sens. L'application F^- est croissante et donc mesurable. On a, pour tout $p \in]0,1[$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F^-(p) \leq x \Leftrightarrow p \leq F(x). \tag{1}$$

La propriété précédente repose en partie sur la propriété suivante. Pour tout $p \in]0,1[$,

$$F(F^-(p)) \geq p. \tag{2}$$

Soit en effet $(x_n)_n$ une suite décroissante de réels convergent vers $F^-(p)$ telle que, pour tout n, $F(x_n) \geq p$. Comme F est continue à droite, on a $F(F^-(p)) = \lim F(x_n) \geq p$. Ainsi (1) est établi. L'implication réciproque de (1) est claire. L'implication directe découle de la croissance de F et de (2).

Une conséquence pratique. Ce résultat peut être utilisé pour simuler des variables aléatoires.

Une conséquence théorique. Les idées du paragraphes « cas général » permettent de montrer qu'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$ est la fonction de répartition d'une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ si et seulement si F est croissante, continue à droite, tend vers 0 en $-\infty$ et vers 1 en $+\infty$.

Une autre conséquence théorique sous forme d'exercice. Montrer qu'une suite de variables aléatoires $(X_n)_n$ converge en loi vers une variable aléatoire X si et seulement si il existe (éventuellement sur un autre espace de probabilité) une suite de variables aléatoires $(\widetilde{X}_n)_n$ et une variable aléatoire $\widetilde{X}$ telles que :

— Pour tout n, les variables aléatoires $\widetilde{X}_n$ et X_n ont même loi. Les variables aléatoires $\widetilde{X}$ et X ont même loi.
— La suite de variables aléatoires $(\widetilde{X}_n)_n$ converge simplement vers $\widetilde{X}$.

2 $F(X)$

Un cas simple. Soit $F : \mathbb{R} \to]0,1[$ un homéomorphisme croissant. C'est la fonction de répartition d'une certaine loi μ. Soit X une variable aléatoire de loi μ. Alors $F(X)$ est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$. Notons tout d'abord que $F(X)$ est à valeurs dans $[0,1]$. Soit maintenant $p \in]0,1[$. On a

$$P(F(X) \leq p) = P(X \leq F^{-1}(p)) = F(F^{-1}(p)) = p.$$

Cela conclut la preuve.

Le cas général ? Le résultat n'est pas vrai sans hypothèse sur la loi de X. En effet, si la loi de X possède des atomes, alors la loi de $F(X)$ possède également des atomes.

Le cas sans atome. Soit X une variable aléatoire dont la loi ne possède pas d'atomes. Notons F sa fonction de répartition. Alors $F(X)$ est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$. Notons tout d'abord que, grâce à nos hypothèses, F est continue. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$. La variable aléatoire X a la même loi que $F^-(U)$. Il reste donc à montrer que $F(F^-(U))$ a même loi que U. Nous allons montrer

$$F(F^-(U)) = U \text{ presque sûrement} \tag{3}$$

ce qui conclura. Soit $p \in]0,1[$. Il existe x tel que $F(x) = p$. C'est ici que sert la continuité de F. On a alors $F^-(p) \leq x$ puis

$$F(F^-(p)) \leq F(x) = p.$$

De (2) on déduit alors

$$F(F^-(p)) = p$$

puis (3) et on conclut.

Une application. Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ une suite de v.a.i.i.d. On note F la fonction de répartition commune des X_i et on suppose F continue. Alors la loi de $\|F_n - F\|_\infty$, où F_n est la fonction de répartition empirique de $(X_1, \ldots, X_n)$, ne dépend pas de F. Le théorème de Kolmogorov-Smirnov porte sur le comportement asymptotique de $\sqrt{n}\|F_n - F\|_\infty$.