Chaînes de Markov

v1.2 novembre 2016 / v1 janvier 2011 - non débuguée

Espace d'états : un ensemble S dénombrable muni de la tribu $\mathcal{P}(S)$.

1 Définition / Markov

Noyau de transition. C'est une application $p : S \times S \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in S$,

$$A \mapsto p(x, A) := \sum_{y \in A} p(x, y).$$

définit une mesure de probabilité sur S. Par abus d'écriture on note également $p(x, \c{d}ot)$ cette mesure de probabilité.

Chaîne de Markov de noyau de transition p. C'est un processus $(X_n)_n$ tel que, pour tout $n \geq 0$:

$$P(X_{n+1} = y | X_0, \ldots, X_n) := E\left(1_{X_{n+1}=y} | X_0, \ldots, X_n\right) = p(X_n, y). \tag{1}$$

Chaîne de Markov de noyau de transition p et de loi initiale ν. La loi d'une chaîne de Markov $(X_n)_n$ est entièrement caractérisée par la donnée de la loi de X_0 et la donnée du noyau de transition. La loi de X_0 s'appelle dans ce contexte la loi initiale. Concrètement, le processus $(X_n)_n$ à valeurs dans S est une chaîne de Markov de noyau de transition p et de loi initiale ν si et seulement si, pour tout entier $n \geq 0$ et tout $(x_0, \ldots, x_n) \in S^{n+1}$,

$$P(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n) = \nu(x_0) p(x_0, x_1) \cdots p(x_{n-1}, x_n).$$

On travaille souvent sur un même univers probabilisable avec un même processus $(X_n)_n$ mais avec différentes lois initiales de X_0 (et donc différentes mesures de probabilités sur l'univers). On note dans ce cas les espérances associées E_ν où ν désigne la loi de X_0. On note simplement E_x lorsque ν est une mesure de Dirac en x.

Une construction. Il existe une application $f : S \times [0, 1] \to S$ telle que, si U est une variable aléatoire uniforme sur $[0, 1]$, alors pour tout $x \in S$, $f(x, U)$ suit la loi $p(x, \cdot)$. On se donne $(U_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur

$[0,1]$. On se donne X_0 une variable aléatoire à valeurs dans S et de loi ν. On définit par récurrence $(X_n)_n$ en posant, pour tout entier $n \geq 1$:

$$X_n = f(X_{n-1}, U_n).$$

Le processus ainsi construit est une chaîne de Markov de transition p et de loi initiale ν.

Markov simple : extension de (1). Soit $h : S^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ une application mesurable et bornée (par exemple). Alors, pour tout $n \geq 0$,

$$E\big(h(X_n, X_{n+1}, \dots)|X_0, \dots, X_n\big) = \phi(X_n)$$

où

$$\phi(x) = E_x(h(X_0, X_1, \dots)).$$

Markov fort : extension de Markov simple. On note $(\mathcal{F}_n)_n$ la filtration naturelle du processus $(X_n)_n$. Soit N un temps d'arrêt. On note $\mathcal{F}_N$ l'ensemble des parties mesurables A de l'univers tels que $A \cap \{N = n\} \in \mathcal{F}_n$ pour tout n. Soit $h : (\mathbb{N} \cup \{+\infty\}) \times S^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ une application mesurable et bornée. Alors,

$$E(h(N, X_N, X_{N+1}, ...)|\mathcal{F}_N) = \phi(N, X_N) \text{ sur } \{N < \infty\}$$

où

$$\phi(n, x) = E_x(h(n, X_0, X_1, \dots))$$

et où $(X_{+\infty}, X_{+\infty+1}, \dots)$ désigne (par exemple) $(X_0, X_1, \dots)$. Cette propriété se déduit de la propriété de Markov simple en distinguant les cas et en revenant par exemple à la définition de l'espérance conditionnelle.

Exemple d'application de la propriété de Markov fort. Le principe de réflexion.

2 Récurrence / transience / irréductibilité

On pose

$$N^+(y) = \text{card}(\{n \geq 1 : X_n = y\})$$

et

$$N(y) = \text{card}(\{n \geq 0 : X_n = y\})$$

On pose

$$\alpha_{x,y} = P_x(N^+(y) \geq 1).$$

On a :

$$P_x(N^+(y) \geq k) = \alpha_{x,y}\alpha_{y,y}^{k-1}. \tag{2}$$

Preuve : Markov fort.

Etats récurrents / transients. L'état y est récurrent si $\alpha_{y,y} = 1$, transient sinon.

Théorème 2.1 *On a équivalence entre les propriétés suivantes :*

1. $P_y(N^+(y) \geq 1) = 1$ *(i.e. y récurrent).*
2. $P_y(N^+(y) = \infty) = 1$.
3. $E_y(N^+(y)) = \infty$.

Preuve : (2) et $E(N^+(y)) = \sum P(N^+(y) \geq k)$.

Chaîne irréductible. Si pour tous x, y, $\alpha_{x,y} > 0$.

Proposition 2.1 *Pour une chaîne irréductible :*

1. *Ou bien tous les états sont récurrents ;*
2. *Ou bien tous les états sont transients.*

Preuve. Si x est récurrent et si $\alpha_{x,y} > 0$ alors :
- $\alpha_{y,x} = 1$ (sinon on pourrait ne pas revenir en x).
- y est récurrent (partant de y, on repasse infiniment souvent en x et donc on fini par repasser en y).

Les deux résultats peuvent se montrer simplement en utilisant la propriété de Markov simple. Par exemple, pour prouver le deuxième résultat on peut introduire a, b tels qu'il est possible d'aller de y à x en a étapes et de x à y en b étapes. On regarde ensuite la probabilité d'aller de y à y en passant par x en $a + n + b$ étapes etc.

Chaîne récurrente / transiente. Dans le premier cas, on dit que la chaîne est récurrente ; dans le second on dit qu'elle est transiente.

Proposition 2.2 *Une chaîne irréductible à espace d'états finis est récurrente.*

Preuve. On a

$$E_x N^+(y) = \alpha_{x,y} E_y N(y) \leq E_y N(y) = 1 + E_y N_y^+(y).$$

Mais on a également

$$\sum_y E_x N^+(y) = E_x(\infty) = \infty.$$

Par conséquent l'un des $E_y N^+(y)$ est infini.

Résultat plus précis : si un ensemble d'état est fermé (on ne peut en sortir) et fini, alors il contient un état récurrent.

3 Mesures stationnaires

Définition. $\mu(x) = \sum_y \mu(y)p(y,x)$. Interprétation dans le cas où μ est une mesure de probabilité.

Théorème 3.1 *Soit a un état récurrent et soit $T_a > 0$ l'instant de premier retour en a. On pose :*

$$\mu_a(x) = E_a \left(\sum_{n<T_a} 1_{X_n=x} \right).$$

Alors tous les $\mu_a(x)$ sont finis et μ_a est une mesure stationnaire.

Preuve avec les mains.
- $\mu_a(x)$ est l'espérance du nombre de passages en x entre les instants 0 et $T_a - 1$.
- $\sum_y \mu_a(y)p(y,x)$ est l'espérance du nombre de passages en x entre les instants 1 et T_a.

Remarque. La masse de μ_a est $\sum_x \mu_a(x) = E_a T_a$.

Théorème 3.2 *Pour une chaîne irréductible et récurrente, les mesures stationnaires sont uniques à constante multiplicative près.*

Preuve. On écrit que la mesure est irréductible sur un grand nombre de pas ; on décompose suivant le dernier passage en a, on fait apparaitre la mesure μ_a etc.

Contre-exemple. Marche biaisée sur $\mathbb{Z}$: $\sum a(n)\delta_n$ stationnaire avec $a(n) = 1$ pour tout n et avec $a(n) = (p/(1-p))^n$ pour tout n.

4 Lois stationnaires

Lemme 4.1 *Si π est une loi stationnaire et si la chaîne est irréductible, alors $\pi(y) > 0$ pour tout y.*

Lemme 4.2 *Si π est une loi stationnaire et si la chaîne est irréductible, alors elle est récurrente.*

Preuve. Par le lemme précédent, on a $\pi(y) > 0$ pour tout y. La récurrence de y découle de cette propriété et de l'existence de π (on peut oublier l'irréductibilité). On a

$$E_\pi N^+(y) = \sum_{n\geq 1} \pi(y) = \infty.$$

Mais on a aussi

$$E_\pi N^+(y) = \sum_x \pi(x)\alpha_{x,y} E_y N(y) \leq \sum_x \pi(x)(1 + E_y N^+(y)) = 1 + E_y N^+(y).$$

Lemme 4.3 *Si π est une loi stationnaire et si la chaîne est irréductible alors, pour tout x, $E_x T_x$ est fini et $\pi(x) = 1/E_x T_x$.*

Preuve. On fixe un état x. Comme la chaîne est irréductible et admet une loi stationnaire, x est récurrent. Le théorème d'existence fournit une mesure stationnaire μ_x qui vérifie :
— $\mu_x(x) = 1$.
— $\sum_y \mu_x(y) = E_x(T_x)$.
Le théorème d'unicité à constante multiplicative près donne alors $\mu_x = E_x(T_x)\pi$. D'où le résultat en appliquant ce qui précède à x.

État positivement récurrent. Lorsque $E_x(T_x)$ est fini.

Théorème 4.4 *Pour une chaîne irréductible, on a équivalence entre les propriétés suivantes :*

1. *Elle possède un état positivement récurrent x.*
2. *Elle possède une distribution stationnaire π.*
3. *Tous les états sont positivement récurrents.*

Dans ce cas, pour tout x, on a $\pi(x) = 1/E_x(T_x)$.

Chaîne positivement récurrente. On dit d'une telle chaîne qu'elle est positivement récurrente.

Preuve.
— (1) implique (2) : on renormalise la distribution stationnaire μ_x ;
— (2) implique (3) : lemme précédent.

(Contre-)exemple. Marche simple sur $\mathbb{Z}$.

5 Comportement asymptotique en moyenne

On note $N_n^+(y)$ le nombre de visite en y entre les instants 1 et n.

Théorème 5.1 *Si y est récurrent, alors, pour tout x :*

$$\frac{N_n^+(y)}{n} \to \frac{1}{E_y T_y} 1_{\{on\ atteint\ y\}}\ P_x\ p.s.$$

Preuve. Hors de l'évènement considéré c'est clair ; sinon LGN.

Remarque. Et si y est transient ?

Remarque. Par convergence dominée on en déduit :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p^k(x,y) \to \alpha_{x,y}/E_yT_y.$$

Théorème 5.2 *On considère une chaîne irréductible et positivement récurrente. On note π sa loi stationnaire. Soit $f : S \to \mathbb{R}$ une application intégrable pour la loi π. Alors pour tout état x,*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_k) \to \int_S f(y)\nu(dy)\ P_x\ p.s.$$

Preuve dans le cas S fini : c'est une conséquence du théorème précédent.

6 Convergence en loi

On a vu à la section précédente la convergence au sens de Cesàro de $p^n(x,y)$. On n'a pas nécessairement convergence des $p^n(x,y)$ (donner un exemple).

Notations. Pour un état récurrent x, on pose :

$$I_x = \{n \geq 1 : p^n(x,x) > 0\}$$

et on note d_x le pgcd de cet ensemble.

Lemme 6.1 *Pour une chaîne irréductible, d_x est indépendant de x.*

Preuve. Simple.

Chaîne apériodique. Une chaîne irréductible est dite apériodique si $d_x = 1$ pour un (et donc tous les) x.

Théorème 6.2 *On considère une chaîne irréductible, apériodique et positivement récurrente. On note π sa loi stationnaire Alors $p^n(x,y) \to \pi(y)$.*

Preuve. Par couplage de deux chaînes (la chaîne (X_n, Y_n) est irréductible (irréductibilité et apériodicité de la première chaîne), admet une loi stationnaire (le produit !) et récurrente (car la loi stationnaire met un poid positif sur chaque état) et donc atteint la diagonale.