

UNIVERSITE MONTPELLIER II
SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC
Institut de Mathématiques et de Modélisation de Montpellier

THÈSE

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université Montpellier II

Discipline : Mathématiques

Ecole Doctorale : Information, Structures et Systèmes

présentée et soutenue publiquement par

Romain GICQUAUD

le 10 juillet 2009

**Étude de quelques problèmes d'analyse et de
géométrie sur les variétés asymptotiquement
hyperboliques**

Jury :

Mr Piotr CHRUSCIEL	Professeur à l'Université de Tours	Président
Mr Gilles CARRON	Professeur à l'Université de Nantes	Rapporteur
Mr Rafe MAZZEO	Professeur à l'Université de Stanford	Rapporteur
Mr Marc HERZLICH	Professeur à l'Université de Montpellier 2	Examineur
Mr Erwann DELAY	Maître de conférences à l'Université d'Avignon	Directeur de Thèse

Remerciements

Mes remerciements vont tout d'abord à Erwann Delay qui m'a encadré au cours de ces trois années. Tout en m'accordant une grande liberté, Erwann a su me guider et me conseiller dans mon travail. Il m'a transmis sa motivation et son enthousiasme. Mais il a également su me donner confiance en moi en m'introduisant progressivement au monde de la recherche. Je lui en suis très reconnaissant.

Je remercie vivement Gilles Carron et Rafe Mazzeo d'avoir accepté de relire ce manuscrit, pour la grande attention qu'ils ont portée à mon travail et pour les nombreuses remarques qu'ils ont soulevées et qui m'ont permis de clarifier certains points.

Piotr Chruściel a accepté de présider ce jury, j'en suis très honoré. Avec Marc Herzlich, ils se sont montrés toujours disponibles pour répondre à mes questions. C'est avec grand plaisir que je les remercie d'avoir accepté de faire partie de ce jury.

Je tiens également à témoigner ma gratitude envers mes anciens directeurs de thèse Philippe Roche et Eric Buffenoir. Les nombreuses discussions que j'ai eu avec eux m'ont permis d'élargir ma culture tant mathématique que physique. Leur soutien et leur aide, ainsi que celle de Marc Herzlich et Piotr Chruściel m'ont été grandement utiles dans le choix de ma nouvelle orientation.

J'ai une pensée toute particulière pour Eric Bahuaud ainsi que Margery et leur fille Béatrice. J'ai beaucoup apprécié de travailler avec lui. Et je tiens à le remercier pour avoir toujours répondu présent lorsque j'ai eu, par la suite, besoin de son aide. Qu'ils trouvent ici l'expression de mon amitié.

C'est avec un grand bonheur que je remercie mes cobureaux et amis Afaf Bouharguane, Damien Isèbe et Hilde Ouvrard pour le soutien qu'ils m'ont apporté tout au long de cette thèse. La bonne ambiance au sein des doctorants et des ATER du labo a également participé au bon déroulement de cette thèse : Alexander, Nicolas Blanc et Nicolas Templier, Guillaume Bulteau et Guillaume Deltour, Paul, Elamine, Chloé, Rahul, Thomas, Michaël, Hassan, Yashou, Frédéric, Olivier (et ses Sobolev à rayure), Florence, Bruno, Rémi et Rémy (la Star du labo), Gwladys (qui a survécu à toutes nos blagues... tout le monde n'aurait pas pu en faire autant!)... avec une pensée toute particulière pour Julien Cortier, Chady El Mir, Clément Hyvrier, Valéry Mahé et Benoît Michel. Je remercie également Ioan Badulescu pour les discussions très enrichissantes que j'ai pu avoir avec lui sur le programme de Langlands.

Je n'oublie pas non plus mes collègues du LPTA qui m'ont toujours accueilli avec grand plaisir et chez qui j'ai toujours trouvé une oreille attentive à mes interrogations et à mes doutes. Je tiens à remercier tout d'abord Federico Manna, Nada Sahoury et André Ranquet, mes anciens cobureaux, pour l'amitié qu'ils m'ont témoignée, Radouane Gannouji pour les nombreuses conversations que j'ai pu avoir avec lui, puis Petrutza, Sean, Amine, Christian, Bruno Moraes et Bruno Mutet, Mohamed, Dominique, Véronique, Richard, Armand, Sylvain, Saeeda... pour les très agréables sorties auxquelles ils m'ont convié et l'ambiance bon enfant à laquelle j'ai pu prendre part.

C'est également avec joie que je remercie Alex Libal, Rémi Palpacuer, Florian Rousson, Magali Borelly, Hélène Lalauze et mes anciens collègues de la prépa agrég' de Montpellier qui m'ont encouragé et soutenu tout au long de cette thèse. Je remercie également mes amis Imad Abbassi, Coralie Minarro, Samuel et Gabriel Poujol pour leur bonne humeur et pour les bons moments que j'ai passés avec eux au cours de cette thèse.

Enfin, cette thèse ne serait rien sans l'amour et le soutien indéfectibles que m'ont témoigné durant ces années mes parents, mon frère Benjamin et Nadia.

Table des matières

Introduction	i
0.1 Présentation générale	i
0.2 Notations et conventions	v
1 Cadre général	1
1.1 Transformations conformes	1
1.1.1 Transformation des tenseurs de courbure	2
1.1.2 Transformation de la seconde forme fondamentale d'une hypersurface	7
1.1.3 Variation au premier ordre des tenseurs	9
1.1.4 Variétés d'Einstein	12
1.2 Variétés asymptotiquement hyperboliques	15
2 Compactification des variétés ALH	17
2.1 Appendice	18
3 Prescription de la courbure scalaire	19
4 Equations de contrainte	21
4.1 Introduction	21
4.2 La méthode conforme de Choquet-Bruhat–Lichnerowicz–York	21
4.2.1 Présentation	22
4.2.2 Etude du laplacien vectoriel et construction de TT-tenseurs	22
4.2.3 Solutions CMC avec des horizons apparents	22
4.3 Stabilité par linéarisation des équations d'Einstein	22
5 Projets à l'issue de la thèse	23

Introduction

0.1 Présentation générale

Le but de cette thèse est d'étudier quelques problèmes d'analyse et de géométrie sur les variétés asymptotiquement hyperboliques. Comme l'indique leur nom, ces variétés sont des variétés riemanniennes non compactes qui ressemblent à l'infini à l'espace hyperbolique dans le sens où leur courbure sectionnelle tend vers -1 . Une grande partie des recherches sur ces variétés a été motivée par les travaux de Charles Fefferman et Robin Graham en 1984 [FG85] et de Juan M. Maldacena en 1997 sur la correspondance AdS/CFT [Mal98] (voir également [Biq05]) dans lesquels il est établi un lien entre la géométrie de ces variétés et les invariants conformes des variétés compactes. Même s'il est impossible de citer tous les travaux dans ce domaine, mentionnons les articles [GL91], [Lee06], [Maz91], [And03] et [CDLS05] dont les idées ont joué un rôle important dans cette thèse. Ces variétés apparaissent également en relativité générale où elles fournissent de bons candidats pour le problème de Cauchy (voir par exemple [AC96]). Leur définition généralise le modèle de la boule de l'espace hyperbolique (voir par exemple [Rat06]) : elles sont obtenues en envoyant à l'infini le bord d'une variété compacte à l'aide d'un facteur conforme. Remarquons par ailleurs que cette construction est similaire à la compactification de Penrose des espaces-temps (voir par exemple [HE]). Une définition précise des variétés asymptotiquement hyperboliques est donnée en section 1.2.

Cette définition est extrinsèque car elle dépend de la variété compacte à bord dont on est parti. Il est naturel de se demander dans quelle mesure cette construction peut être inversée pour les variétés **asymptotiquement localement hyperboliques**, c'est-à-dire des variétés non compactes dont la courbure tend vers -1 à l'infini avec des corrections exponentiellement petites,

$$\sec_g = -1 + O(e^{-ar}),$$

avec $a > 0$ une constante et $r = d_g(x, \cdot)$ la distance à un point $x \in M$ quelconque : peut-on reconstruire une variété compacte à bord \bar{M} et un facteur conforme ρ tels que la métrique $\bar{g} = \rho^2 g$ s'étend en une métrique régulière jusqu'au bord ? Cette question a été étudiée par Eric Bahuaud et Tracey Marsh dans [BM06] (étendant et généralisant un résultat précédent de Michael Anderson et Richard Schoen [AS85]) et [Bah08]. Dans un travail effectué en collaboration avec Eric Bahuaud et reproduit au chapitre 2, nous avons étendu les résultats de [Bah08] en comprenant en particulier comment la valeur de a influence la régularité de la compactification. Avant d'énoncer le théorème que nous avons obtenu, introduisons quelques notions préliminaires. Une définition naturelle de la frontière à l'infini est donnée dans [EO73] : la **frontière à l'infini** $M(\infty)$ d'une variété riemannienne non compacte est l'ensemble des rayons géodésiques $\gamma : [0; \infty) \rightarrow M$ non bornés, paramétrés par longueur d'arc, quotienté par la relation d'équivalence suivante :

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \text{ ssi } d_g(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \text{ est bornée sur } [0; \infty).$$

Une autre notion importante introduite dans [BM06] est celle de partie essentielle. Une partie $K \subset M$ est appelée **partie essentielle** de M si :

1. K est une sous-variété compacte de M , de codimension 0, à bord lisse,
2. $\sec_g < 0$ sur $M \setminus K$,
3. K est totalement convexe (i.e. si $\gamma : [a; b] \rightarrow M$ est une géodésique avec $\gamma(a), \gamma(b) \in K$, alors $\gamma([a; b]) \subset K$).

La définition que nous donnons ici peut sembler plus forte que celle qui apparaît dans [BM06]. Elles sont cependant équivalentes (c'est une conséquence de [BM06, Théorème 4] et de la remarque suivant le lemme ??). L'hypothèse de totale convexité permet d'éviter des situations telles que celle illustrée par la figure 0.1a : l'application exponentielle du fibré normal sortant N^+Y du bord $Y = \partial K$ établit un difféomorphisme entre $\overline{M} \setminus K$ et $[0; \infty) \times Y$. L'existence d'une partie essentielle permet également d'éviter des comportements asymptotiques singuliers tels que les cusps (figure 0.1b).

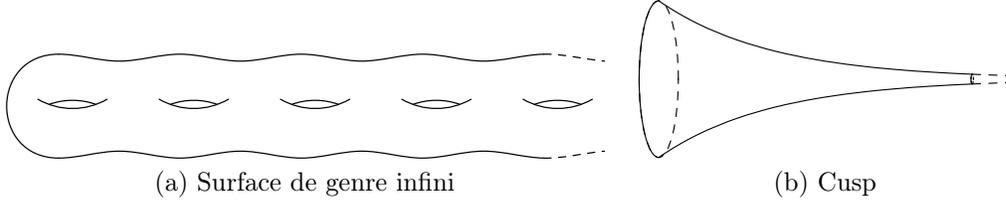


FIGURE 1 – Structures à l'infini de certaines variétés à courbure négative.

Le théorème principal du chapitre 2 est le suivant :

Théorème 0.1.1 (Théorèmes ?? et ?? page ??). *Soit (M, g) une variété riemannienne complète non compacte admettant une partie essentielle $K \subset M$. Soit r la distance à K . On pose $\overline{M} = M \cup M(\infty)$, $\rho = e^{-r}$ et $\overline{g} = \rho^2 g$. Si les dérivées covariantes du tenseur de Riemann sont contrôlées, on a :*

1. *Si $\sec_g = -1 + O(e^{-ar})$ avec $0 < a < 1$, alors \overline{M} admet une structure de variété $\mathcal{C}^{1,a}$ indépendante de K et la métrique \overline{g} s'étend en une métrique $\mathcal{C}^{0,a}$ à tout \overline{M} .*
2. *Si $\sec_g = -1 + O(e^{-ar})$ avec $1 < a < 2$, alors \overline{M} admet une structure de variété $\mathcal{C}^{2,a-1}$ indépendante de K et la métrique \overline{g} s'étend en une métrique $\mathcal{C}^{1,a-1}$ à tout \overline{M} .*

Remarquons que le théorème ne peut pas être amélioré dans le cas $a = 1$. Un exemple de variété satisfaisant $\sec_g = -1 + O(e^{-ar})$ avec $a = 1$ mais qui n'admet pas de compactification conforme Lipschitzienne est donné dans [Bah08]. Nous n'avons pas poursuivi l'analyse pour des valeurs plus grandes de a parce que nous étions principalement intéressés par le cas des variétés d'Einstein avec $a = 2$ (voir conjecture ?? page ??). Lorsque $a > 2$, la situation devient rigide, c'est le théorème de Yuguang Shi et Gang Tian [ST05] :

Théorème 0.1.2 (Théorème de rigidité de Shi et Tian, [ST05]). *Soit (M^{n+1}, g) une variété riemannienne complète admettant un pôle p (c'est-à-dire que l'application exponentielle $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ est un difféomorphisme) tel que pour un certain $r > 1$, la sphère centrée en p et de rayon r est convexe et $\sec_g < 0$ en dehors de la boule de centre p et de rayon 1. On suppose de plus que (M, g) est à Ricci minoré :*

$$\text{Ric}_g \geq -ng$$

alors

1. *si $n > 3$ et si (M, g) est asymptotiquement localement hyperbolique d'ordre $a > 2$,*
2. *ou si $n = 3$ et si la partie sans trace du tenseur de Riemann $\overset{\circ}{\mathcal{R}} = \frac{1}{n-1} \overset{\circ}{\text{Ric}} \otimes g + \mathcal{W}$, satisfait à*

$$\left| \overset{\circ}{\mathcal{R}} \right| \in L^1,$$

(M, g) est isométrique à l'espace hyperbolique \mathbb{H}^{n+1} .

Le second but du chapitre 2 est de montrer que si (M, g) est une variété asymptotiquement localement hyperbolique d'Einstein, alors les dérivées covariantes du tenseur de Riemann sont contrôlées :

Théorème 0.1.3 (Théorème ?? page ??). *Soit (M^n, g) , $n \geq 3$, une variété riemannienne complète non compacte admettant une partie essentielle $K \subset M$. Soit r la distance à K . Si (M, g) est asymptotiquement localement hyperbolique d'ordre $a > 0$*

$$\sec_g = -1 + O(e^{-ar})$$

et d'Einstein

$$\text{Ric}_g = -(n-1)g,$$

alors il existe des constantes C_j , $j = 1, 2, \dots$ telles que

$$\left| \nabla^{(j)} \mathcal{R}_g \right| \leq C_j e^{-ar}.$$

Dans l'appendice au chapitre 2, nous présentons un certain nombre de résultats que nous avons obtenus dans le but de prouver la conjecture ???. Puis nous donnons un critère simple d'existence de partie essentielle (lemme ???) que nous appliquons aux variétés de Cartan-Hadamard et aux variétés asymptotiquement hyperboliques (corollaire ???). Finalement nous montrons un théorème généralisant un résultat de Michael Anderson [And83] sur l'existence de fonctions harmoniques sur les variétés à courbure asymptotiquement négativement pincées (Théorème ???).

Le chapitre 3 traite de la prescription de la courbure scalaire sur une variété asymptotiquement hyperbolique. Il étend et généralise un travail antérieur d'Erwann Delay [Del97]. Il s'agit, en particulier, de déterminer quelles fonctions $\widehat{\text{Scal}}$ peuvent être obtenues comme la courbure scalaire d'une métrique conforme à une métrique g donnée :

Théorème 0.1.4 (Théorèmes ??? page ??, ??? page ?? et ??? page ??). *Soit (M^n, g) une variété asymptotiquement hyperbolique. Si $\widehat{\text{Scal}} : M \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction régulière strictement négative telle que $\widehat{\text{Scal}} \rightarrow -n(n-1)$ à l'infini, alors il existe une unique métrique \widehat{g} conforme à g telle que $\text{Scal}_{\widehat{g}} = \widehat{\text{Scal}}$. Si de plus $\widehat{\text{Scal}} - \text{Scal}_g = O(\rho^s)$ pour un certain $s \in (0; n)$, alors on a $|\widehat{g} - g|_g = O(\rho^s)$ avec un contrôle similaire sur un certain nombre de dérivées covariantes de \widehat{g} .*

Lorsque le bord (interne) de M est non vide, nous étudions le problème de Dirichlet associé (Théorème ???) ainsi que le problème de la prescription de la courbure moyenne (Théorème ???). Si $\widehat{\text{Scal}} - \text{Scal}_g = O(\rho^s)$ avec $s \geq n$, le comportement de la métrique ainsi construite n'a plus forcément le même comportement que $\widehat{\text{Scal}} - \text{Scal}$. Une obstruction importante est alors fournie par la masse [Wan01, CH03] (voir également [MO89]). Ce chapitre nous permet par ailleurs d'introduire une généralisation de la méthode de monotonie (section ???) qui est un outil pratique pour résoudre certaines équations quasi-linéaires elliptiques et dont nous nous servirons à nouveau au chapitre 4 suivant.

Le chapitre 4 est consacré à l'étude de quelques problèmes en relativité générale. Cette théorie décrit l'espace-temps comme une variété \mathcal{M} munie d'une métrique Lorentzienne g (c'est-à-dire de signature $-+++$) satisfaisant les équations d'Einstein :

$$G_{\mu\nu} + \Lambda_c g_{\mu\nu} = \frac{8\pi\mathcal{G}}{c^4} T_{\mu\nu},$$

où $G_{\mu\nu} = \text{Ric}_{\mu\nu} - \frac{\text{Scal}}{2} g_{\mu\nu}$ est le tenseur d'Einstein de g , Λ_c est la constante cosmologique, \mathcal{G} la constante de Newton, c la vitesse de la lumière et $T_{\mu\nu}$ le tenseur d'énergie-impulsion de la matière.

Les variables naturelles pour décrire le problème de Cauchy sont la champ gravitationnel à la « date $t=0$ », c'est-à-dire la métrique γ induite sur une hypersurface M de genre espace (c'est-à-dire telle que la métrique induite est définie positive) et sa vitesse, la seconde forme fondamentale K du plongement $M \subset \mathcal{M}$. Ces deux quantités ne peuvent pas être choisies indépendamment. Dans le cas d'un espace-temps vide ($T_{\mu\nu} = 0$), elles sont reliées par les **équations de contrainte** :

$$\begin{aligned} \text{Scal}_\gamma - 2\Lambda_c - |K|_\gamma^2 + (\text{tr}_\gamma K)^2 &= 0 && \text{(Contrainte hamiltonienne)} \\ \text{div}_\gamma K - d(\text{tr}_\gamma K) &= 0 && \text{(Contraintes moment).} \end{aligned}$$

Ces équations sont les analogues Lorentziens des traces des équations de Gauss-Codazzi.

Yvonne Choquet-Bruhat et Robert Geroch ont montré dans [FB52, CBG69] que, réciproquement, pour n'importe quel triplet (M, γ, K) satisfaisant les équations de contrainte, il existe un unique espace-temps maximal, globalement hyperbolique (voir chapitre 4 pour la définition précise) satisfaisant les équations d'Einstein du vide et contenant (M, γ) en tant qu'hypersurface plongée dont la seconde forme

fondamentale est K . Par conséquent, pour obtenir de nouveaux espaces-temps solutions des équations d'Einstein, il suffit de construire des solutions des équations de contrainte.

Dans la section 4.2 nous décrivons la méthode conforme de Choquet-Bruhat–Lichnerowicz–York qui permet, dans de nombreux cas, de fournir des solutions des équations de contrainte. Cette méthode consiste à choisir une variété M , une métrique γ_0 sur M , une fonction $\tau : M \rightarrow \mathbb{R}$ (qui représente la courbure moyenne $\frac{1}{3} \operatorname{tr}_\gamma K$ de M dans \mathcal{M}) et un 2-tenseur symétrique L_0 de trace nulle pour γ_0 puis à trouver $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction positive et ψ une 1-forme telles que :

$$\begin{cases} \gamma = \varphi^4 \gamma_0 \\ K = \varphi^{-2} \left(L_0 + \mathring{\mathcal{L}}_{\psi^\#} \gamma_0 \right) \end{cases}$$

soient solution des équations de contrainte, avec $\mathring{\mathcal{L}}_{\psi^\#} \gamma_{0ij} = \nabla_i \psi_j + \nabla_j \psi_i - \frac{2}{3} \nabla_k \psi^k \gamma_{0ij}$ l'opérateur de Killing conforme, ∇ désignant ici la connexion de Levi-Civita de γ_0 . On obtient alors les équations suivantes :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \left(L_0 + \mathring{\mathcal{L}}_{\psi^\#} \gamma_0 \right) = 2\varphi^6 d\tau, \\ -8\Delta\varphi + \operatorname{Scal}_{\gamma_0} \varphi + (6\tau^2 - 2\Lambda_c) \varphi^5 - \left| L_0 + \mathring{\mathcal{L}}_{\psi^\#} \gamma_0 \right|^2 \varphi^{-7} = 0, \end{cases}$$

Dans le cas où la courbure moyenne τ est constante (hypersurface CMC), ces équations découplent. On peut alors résoudre la première équation en ψ puis injecter la valeur de ψ ainsi trouvée dans la seconde équation. Nous décrivons la résolution de la première équation dans la section 4.2.2. Une condition au bord (interne) naturelle pour les équations de contrainte est celle d'horizon apparent. Les horizons apparents futurs sont des hypersurfaces dont le développement en temps produit des trous noirs (voir par exemple [Wal], les horizons apparents passés produisent des trous blancs). A l'aide de la méthode conforme, nous obtenons en section 4.2.3 le résultat suivant :

Théorème 0.1.5 (Théorèmes ?? page ?? et ?? page ??). *Soit (M, g) une variété asymptotiquement hyperbolique.*

1. *Si $\Lambda_c < 0$, alors pour n'importe quel L_0 , la méthode conforme fournit une solution des équations de contrainte.*
2. *Si $\Lambda_c = 0$, alors, dépendant du signe de τ , la méthode conforme fournit une solution des équations de contrainte contenant uniquement soit des horizons apparents passés soit des horizons apparents futurs.*

Nous donnons également un contre-exemple montrant que le second cas n'admet pas de solution général. Ce résultat généralise et étend un résultat précédent de Lars Andersson et Piotr Chruściel [AC96]. Utilisant les résultats de [Lee06], nous avons pu, en particulier, obtenir un intervalle de poids plus large pour lequel la première équation peut être résolue en ψ et diminuer la régularité au bord nécessaire.

Lié à cette étude, nous traitons dans la section 4.3 le problème de la stabilité par linéarisation des équations de contrainte. Les équations d'Einstein forment un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires et il est difficile, en l'absence de symétrie, d'obtenir des solutions exactes. L'idée est alors d'étudier les équations d'Einstein linéarisées au voisinage d'une solution exacte. Se pose alors la question de savoir si l'ensemble des solutions du problème linéarisé peuvent se relever en des solutions des équations d'Einstein. L'approche généralement utilisée est alors de constater que les équations du problème linéarisé induisent des solutions des équations de contrainte sur une surface de Cauchy, puis de démontrer que les équations de contrainte sont stables par linéarisation (ce problème étant plus simple car il est elliptique) et, finalement, de prouver que les solutions des équations d'Einstein dépendent de manière régulière des équations de contrainte. Cette approche a été utilisée en particulier pour étudier la stabilité par linéarisation des équations d'Einstein lorsque l'espace-temps admet une surface de Cauchy compacte (voir par exemple [FM73], [Mon75, Mon76] et [AM79]) ou asymptotiquement euclidienne [CBD73, CBFM77]. Nous étendons ces résultats au cas d'une surface de Cauchy asymptotiquement hyperbolique :

Théorème 0.1.6 (Théorème ?? page ??, Proposition ?? page ?? et ?? page ??). *Soit (M, γ) une variété asymptotiquement hyperbolique et K un 2-tenseur symétrique sur M tel que $\operatorname{tr}_\gamma K$ est constante*

sur M . Si (M, γ, K) satisfait les équations de contrainte du vide avec $\Lambda_c \leq 0$ et $\text{tr}_\gamma K \neq 0$ si $\Lambda_c = 0$ alors les équations de contrainte sont stables par linéarisation en (M, γ, K) dans un certain intervalle de poids. Nous donnons ensuite un exemple montrant que ce résultat cesse d'être vrai pour des poids plus forts.

Remarquons que ce cas englobe les sections hyperboliques de l'espace-temps de Minkowski ($\Lambda_c = 0$ et $\text{tr}_g K = \pm 1$) et les sections naturelles de l'espace-temps d'anti-de Sitter. Signalons cependant que l'espace-temps d'anti-de Sitter n'est pas globalement hyperbolique. Nous n'obtenons donc, dans le cas $\Lambda_c < 0$, que la stabilité par linéarisation du développement de Cauchy de M .

0.2 Notations et conventions

Dans toute cette thèse, sauf mention du contraire, nous conviendrons que (M, g) est une variété riemannienne de dimension n , éventuellement à bord, complète (pour la distance induite par la métrique g . La complétude géodésique n'ayant plus de sens si le bord est non vide). $\hat{g}, \bar{g} \dots$ désignent alors des métriques conformément équivalentes à g . La **connexion de Levi-Civita** associée à g sera notée ∇ , celles de $\hat{g}, \bar{g} \dots$ seront notées respectivement $\hat{\nabla}, \bar{\nabla} \dots$. Les indices seront montés et descendus à l'aide de la métrique g à l'exception cependant de $\bar{g}^{ij}, \hat{g}^{ij} \dots$ qui désignent les inverses (les métriques induites sur le fibré cotangent) de $\bar{g}_{ij}, \hat{g}_{ij} \dots$. Nous adopterons également systématiquement la convention de sommation d'Einstein.

On utilisera la convention suivante pour le **tenseur de Riemann** dans sa version (1, 3) :

$$\mathcal{R}(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z = \mathcal{R}^i{}_{jkl} Z^j X^k Y^l \frac{\partial}{\partial x^i},$$

et dans sa version (0, 4) :

$$\mathcal{R}(W, Z, X, Y) = \langle W, \mathcal{R}(X, Y)Z \rangle_g = \mathcal{R}_{ijkl} W^i Z^j X^k Y^l.$$

Les tenseurs de Riemann associés à $\bar{g}, \hat{g} \dots$ seront notés respectivement $\bar{\mathcal{R}}, \hat{\mathcal{R}} \dots$

La notation Σ sera utilisée pour désigner une hypersurface plongée dans M . On notera alors g^Σ la métrique induite et $\mathcal{R}^\Sigma, \text{Ric}^\Sigma \dots$ les tenseurs de Riemann, de Ricci... associés à la métrique g^Σ .

Le **produit de Kulkarni–Nomizu** de deux (0,2)-tenseurs symétriques h et k est défini par :

$$h \odot k(X, Y, Z, T) = h(X, Z)k(Y, T) + h(Y, T)k(X, Z) - h(Y, Z)k(X, T) - h(X, T)k(Y, Z).$$

Le tenseur de Riemann se décompose sous l'action du groupe orthogonal en représentations irréductibles (voir par exemple [Bes87]) :

$$\mathcal{R} = \frac{\text{Scal}}{2n(n-1)} g \odot g + \frac{1}{n-2} \mathring{\mathcal{R}}\text{ic} \odot g + \mathcal{W}, \quad (0.2.1)$$

où :

- $\text{Scal} = g^{ij} g^{kl} \mathcal{R}_{ijkl}$ est le scalaire de courbure,
- $\mathring{\mathcal{R}}\text{ic}$ est la partie sans trace du tenseur de Ricci ($\mathring{\mathcal{R}}\text{ic}_{ij} = \mathcal{R}^k{}_{ikj}$),
- \mathcal{W} est le tenseur de Weyl.

Si Σ est une hypersurface de M et N une normale unitaire à Σ , nous définissons la **seconde forme fondamentale** de Σ (relativement à N) par

$$S(X, Y) = \langle X, \nabla_Y N \rangle_g = - \langle N, \nabla_Y X \rangle_g,$$

où X et Y sont deux champs de vecteurs tangents à Σ . La **courbure moyenne** de l'hypersurface Σ sera notée $H = \text{tr}_\Sigma S$. Au voisinage de tout point p de Σ , il est possible d'introduire un système de coordonnées privilégiées, appelées **coordonnées de Fermi**, défini ainsi. On introduit une carte locale θ dans un voisinage $V \subset \Sigma$ relativement compact de p . Il existe alors un $\epsilon > 0$ tel que l'application

$\varphi : (q, r) \mapsto \exp_q(rN)$ est un difféomorphisme entre $V \times (-\epsilon; \epsilon)$ et U son image. Les coordonnées de Fermi sur U sont alors définies par $x \mapsto (r(x), \theta(q(x)))$ où $(q(x), r(x)) = \varphi^{-1}(x)$. La dérivée partielle par rapport à r dans les équations précédentes est alors à comprendre comme la dérivée partielle dans les coordonnées de Fermi. Par la suite, lorsque nous travaillerons dans des coordonnées de Fermi, nous utiliserons systématiquement la notation 0 pour désigner la direction radiale r , les lettres grecques désignant les coordonnées le long de Y . Les indices latins désigneront n'importe quel système de coordonnées sur M . En particulier dans un système de coordonnées de Fermi, ces indices désigneront l'ensemble des directions radiales et tangentielles (i.e. le long de Y). Les équations de Gauss–Codazzi–Mainardi s'écrivent donc :

– *Equation de Mainardi*

$$\partial_r S^\mu{}_\nu + S^\mu{}_\sigma S^\sigma{}_\nu = -\mathcal{R}^\mu{}_{0\nu 0}, \quad (0.2.2)$$

– *Equation de Gauss*

$$\mathcal{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \mathcal{R}^\Sigma_{\alpha\beta\gamma\delta} - S_{\alpha\gamma} S_{\beta\delta} + S_{\alpha\delta} S_{\beta\gamma}, \quad (0.2.3)$$

– *Equation de Codazzi-Mainardi*

$$\nabla_\mu^\Sigma S_{\nu\sigma} - \nabla_\nu^\Sigma S_{\mu\sigma} = \mathcal{R}_{\mu\nu\sigma 0}, \quad (0.2.4)$$

– *Composantes normales du tenseur de Riemann*

$$\mathcal{R}_{0\mu 0\nu} = \text{Ric}_{\mu\nu} - \text{Ric}^\Sigma_{\mu\nu} + H S_{\mu\nu} - S_{\mu\sigma} S^\sigma{}_\nu \quad (0.2.5)$$

– *Evolution de la métrique tangentielle sous le flot géodésique*

$$\partial_r g_{\mu\nu} = \mathcal{L}_{\partial_r} g_{\mu\nu} = 2S_{\mu\nu}. \quad (0.2.6)$$

Le lemme suivant donne tous les coefficients de Christoffel (à l'exception des composantes purement tangentielles) dans les coordonnées de Fermi :

Lemme 0.2.1 (Coefficients de Christoffel dans les coordonnées de Fermi).

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^0 &= -S_{\mu\nu} \\ \Gamma_{0\nu}^\mu &= S^\mu{}_\nu \\ \Gamma_{00}^\mu &= 0 \\ \Gamma_{\mu 0}^0 &= 0 \\ \Gamma_{00}^0 &= 0. \end{aligned}$$

La preuve de ce lemme est une simple application de la formule explicite des coefficients de Christoffel et du lemme de Gauss :

$$g = dr^2 + g^\Sigma(r)$$

où $g^\Sigma(r)$ est la restriction du tenseur métrique au fibré tangent à l'hypersurface $\Sigma_r = \{r = \text{constante}\}$. On obtient alors la formule suivante pour la décomposition du laplacien :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + H \frac{\partial f}{\partial r} + \Delta_r f, \quad (0.2.7)$$

où Δ_r désigne le laplacien de (Σ_r, g^Σ) .

Chapitre 1

Le cadre général

Dans ce chapitre, nous introduisons les principaux outils dont nous nous servirons par la suite. La section 1.1 présente les formules de variation conforme des tenseurs de courbure, de la seconde forme fondamentale d'une hypersurface et de la hessienne d'une fonction. Ces formules seront d'un intérêt constant dans toute la suite. La section 1.2 introduit la classe des variétés asymptotiquement hyperboliques et les espaces fonctionnels associés. Ces espaces constituent le cadre principal de cette thèse.

Sommaire

1.1	Transformations conformes	1
1.1.1	Transformation des tenseurs de courbure	2
1.1.2	Transformation de la seconde forme fondamentale d'une hypersurface	7
1.1.3	Variation au premier ordre des tenseurs	9
1.1.4	Variétés d'Einstein	12
1.2	Variétés asymptotiquement hyperboliques	15

1.1 Transformations conformes

Soit (M^n, g) une variété riemannienne. On se donne $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 (au moins) et $\kappa \neq 0$ un réel à préciser. Posons $\hat{g} = \varphi^\kappa g$. Nous souhaitons calculer la connexion de Levi-Civita et les tenseurs de courbure de \hat{g} en fonction de ceux de g . Dans toute cette section X, Y, Z, \dots désignent des champs de vecteurs arbitraires.

Proposition 1.1.1 (Transformation de la connexion de Levi-Civita). *Soient ∇ et $\hat{\nabla}$ les connexions de Levi-Civita de g et \hat{g} respectivement. Posons $U = \hat{\nabla} - \nabla$. Alors U est un (1,2)-tenseur donné par :*

$$U(X, Y) = \frac{\kappa}{2} \left(\frac{\nabla_X \varphi}{\varphi} Y + \frac{\nabla_Y \varphi}{\varphi} X - g(X, Y) \frac{\nabla \varphi}{\varphi} \right) \tag{1.1.1}$$

Démonstration. La preuve est identique à celle du calcul des coefficients de Christoffel. Les connexions ∇ et $\hat{\nabla}$ ont une torsion nulle :

$$\begin{cases} \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \\ \hat{\nabla}_X Y - \hat{\nabla}_Y X = [X, Y]. \end{cases}$$

En soustrayant ces deux équations, on obtient que U est symétrique : $U(X, Y) = U(Y, X)$.

Ensuite $\hat{\nabla}$ est compatible avec la métrique \hat{g} :

$$\begin{aligned} \partial_Z \hat{g}(X, Y) &= \hat{g}(\hat{\nabla}_Z X, Y) + \hat{g}(X, \hat{\nabla}_Z Y) \\ \partial_Z [\varphi^\kappa g(X, Y)] &= \varphi^\kappa \left[g(\hat{\nabla}_Z X, Y) + g(X, \hat{\nabla}_Z Y) \right] \\ \kappa \varphi^{\kappa-1} \partial_Z \varphi g(X, Y) + \varphi^\kappa \partial_Z g(X, Y) &= \varphi^\kappa \left[g(\hat{\nabla}_Z X, Y) + g(X, \hat{\nabla}_Z Y) \right] \\ \kappa \varphi^{-1} \partial_Z \varphi g(X, Y) + \partial_Z g(X, Y) &= g(\hat{\nabla}_Z X, Y) + g(X, \hat{\nabla}_Z Y). \end{aligned}$$

Or ∇ est compatible avec la métrique g donc

$$\kappa\varphi^{-1}\partial_Z\varphi g(X, Y) + g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y) = g(\widehat{\nabla}_Z X, Y) + g(X, \widehat{\nabla}_Z Y).$$

Par définition de U , on a donc :

$$g(U(Z, X), Y) + g(X, U(Z, Y)) = \kappa\varphi^{-1}\partial_Z\varphi g(X, Y).$$

En effectuant une permutation circulaire sur les vecteurs X, Y, Z , on obtient les trois équations suivantes :

$$\begin{cases} g(U(X, Z), Y) + g(X, U(Z, Y)) = \kappa\varphi^{-1}\partial_Z\varphi g(X, Y) \\ g(U(Y, X), Z) + g(Y, U(X, Z)) = \kappa\varphi^{-1}\partial_X\varphi g(Y, Z) \\ g(U(Z, Y), X) + g(Z, U(Y, X)) = \kappa\varphi^{-1}\partial_Y\varphi g(Z, X), \end{cases}$$

qu'on peut réécrire en utilisant la symétrie de U :

$$\begin{cases} g(U(X, Z), Y) + g(U(Y, Z), X) = \kappa\varphi^{-1}\partial_Z\varphi g(X, Y) \\ g(U(X, Y), Z) + g(U(X, Z), Y) = \kappa\varphi^{-1}\partial_X\varphi g(Y, Z) \\ g(U(Y, Z), X) + g(U(X, Y), Z) = \kappa\varphi^{-1}\partial_Y\varphi g(Z, X). \end{cases}$$

En ajoutant les deux dernières lignes et en soustrayant la première, on obtient alors :

$$\begin{aligned} 2g(U(X, Y), Z) &= \kappa\varphi^{-1}(\partial_X\varphi g(Y, Z) + \partial_Y\varphi g(Z, X) - \partial_Z\varphi g(X, Y)) \\ &= \kappa g\left(\frac{\nabla_X\varphi}{\varphi}Y + \frac{\nabla_Y\varphi}{\varphi}X - g(X, Y)\frac{\nabla\varphi}{\varphi}, Z\right). \end{aligned}$$

□

1.1.1 Transformation des tenseurs de courbure

Proposition 1.1.2 (Transformation du tenseur de Riemann). *Le tenseur de Riemann complètement covariant de la métrique $\widehat{g} = \varphi^\kappa g$ est donné par :*

$$\widehat{\mathcal{R}} = \varphi^\kappa \left(\mathcal{R} + \frac{\kappa^2}{4} \left(\frac{d\varphi}{\varphi} \otimes \frac{d\varphi}{\varphi} - \frac{1}{2} \left| \frac{d\varphi}{\varphi} \right|_g^2 g \right) \otimes g - \frac{\kappa}{2} \left(\frac{\text{Hess } \varphi}{\varphi} - \frac{d\varphi}{\varphi} \otimes \frac{d\varphi}{\varphi} \right) \otimes g \right). \quad (1.1.2)$$

En particulier, si $\kappa = -2$:

$$\widehat{\mathcal{R}} = \varphi^{-2} \left(\mathcal{R} + \frac{\text{Hess } \varphi}{\varphi} \otimes g - \frac{1}{2} \left| \frac{d\varphi}{\varphi} \right|_g^2 g \otimes g \right). \quad (1.1.3)$$

Démonstration. Le (0,4)-tenseur de Riemann de \widehat{g} est donné par :

$$\widehat{\mathcal{R}}(X, Y, Z, T) = \widehat{g}\left(Z, \widehat{\mathcal{R}}(X, Y)T\right) = \varphi^\kappa g\left(Z, \widehat{\mathcal{R}}(X, Y)T\right).$$

Par définition :

$$\widehat{\mathcal{R}}(X, Y)T = \widehat{\nabla}_X \widehat{\nabla}_Y T - \widehat{\nabla}_Y \widehat{\nabla}_X T - \widehat{\nabla}_{[X, Y]} T.$$

Nous allons maintenant remplacer $\widehat{\nabla}$ par son expression en fonction de ∇ et de U :

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{R}}(X, Y)T &= \widehat{\nabla}_X \widehat{\nabla}_Y T - \widehat{\nabla}_Y \widehat{\nabla}_X T - \widehat{\nabla}_{[X, Y]} T \\ &= \nabla_X \widehat{\nabla}_Y T - \nabla_Y \widehat{\nabla}_X T - \nabla_{[X, Y]} T + U(X, \widehat{\nabla}_Y T) - U(Y, \widehat{\nabla}_X T) - U([X, Y], T) \\ &= \nabla_X \nabla_Y T - \nabla_Y \nabla_X T - \nabla_{[X, Y]} T \\ &\quad + \nabla_X(U(Y, T)) - \nabla_Y(U(X, T)) + U(X, \widehat{\nabla}_Y T) - U(Y, \widehat{\nabla}_X T) - U([X, Y], T) \\ &= \mathcal{R}(X, Y)T + \nabla_X U(Y, T) - \nabla_Y U(X, T) \\ &\quad + U(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], T) + U(X, \widehat{\nabla}_Y T - \nabla_Y T) - U(Y, \widehat{\nabla}_X T - \nabla_X T) \\ &= \mathcal{R}(X, Y)T + \nabla_X U(Y, T) - \nabla_Y U(X, T) + U(X, U(Y, T)) - U(Y, U(X, T)). \end{aligned}$$

Il ne reste qu'à évaluer les deux termes $\nabla_X U(Y, T) - \nabla_Y U(X, T)$ et $U(X, U(Y, T)) - U(Y, U(X, T))$. Pour simplifier les calculs nous allons poser $\varphi = e^\rho$.

$$\begin{aligned}
\nabla_X U(Y, T) &= \nabla_X(U(Y, T)) - U(\nabla_X Y, T) - U(X, \nabla_X T) \\
&= \frac{\kappa}{2} (\nabla_X(\nabla_Y \rho T) + \nabla_X(\nabla_T \rho Y) - g(\nabla_X Y, T) \nabla \rho - g(Y, \nabla_X T) \nabla \rho - g(Y, T) \nabla_X \nabla \rho) \\
&\quad - \frac{\kappa}{2} (\nabla_{\nabla_X Y} \rho T + \nabla_T \rho \nabla_X Y - g(\nabla_X Y, T) \nabla \rho) \\
&\quad - \frac{\kappa}{2} (\nabla_Y \rho \nabla_X T + \nabla_{\nabla_X T} \rho Y - g(Y, \nabla_X T) \nabla \rho) \\
&= \frac{\kappa}{2} (\nabla_{X, Y} \rho T + \nabla_{X, T} \rho Y - g(Y, T) \nabla_X \nabla \rho).
\end{aligned}$$

En antisymétrisant par rapport à X et Y , on obtient :

$$\nabla_X U(Y, T) - \nabla_Y U(X, T) = \frac{\kappa}{2} (\nabla_{X, T} \rho Y - \nabla_{Y, T} \rho X + g(X, T) \nabla_Y \nabla \rho - g(Y, T) \nabla_X \nabla \rho),$$

puis :

$$\begin{aligned}
g(Z, \nabla_X U(Y, T) - \nabla_Y U(X, T)) &= \frac{\kappa}{2} (\nabla_{X, T} \rho g(Y, Z) - \nabla_{Y, T} \rho g(X, Z) + g(X, T) \nabla_{Y, Z} \rho - g(Y, T) \nabla_{X, Z} \rho) \\
&= -\frac{\kappa}{2} \text{Hess } \rho \otimes g(X, Y, Z, T).
\end{aligned}$$

Pour le second terme, on obtient :

$$\begin{aligned}
U(X, U(Y, T)) &= \frac{\kappa}{2} U(X, \nabla_Y \rho T + \nabla_T \rho Y - g(Y, T) \nabla \rho) \\
&= \frac{\kappa^2}{4} \nabla_X \rho (\nabla_Y \rho T + \nabla_T \rho Y - g(Y, T) \nabla \rho) + \frac{\kappa^2}{4} (2 \nabla_Y \rho \nabla_T \rho - g(Y, T) \nabla_{\nabla \rho} \rho) X \\
&\quad - \frac{\kappa^2}{4} (g(X, T) \nabla_Y \rho + g(X, Y) \nabla_T \rho - g(Y, T) \nabla_X \rho) \nabla \rho \\
&= \frac{\kappa^2}{4} \nabla_X \rho (\nabla_Y \rho T + \nabla_T \rho Y) + \frac{\kappa^2}{4} (2 \nabla_Y \rho \nabla_T \rho - g(Y, T) |d\rho|_g^2) X \\
&\quad - \frac{\kappa^2}{4} (g(X, T) \nabla_Y \rho + g(X, Y) \nabla_T \rho) \nabla \rho \\
U(X, U(Y, T)) - U(Y, U(X, T)) &= -\frac{\kappa^2}{4} (\nabla_X \rho \nabla_T \rho Y - \nabla_Y \rho \nabla_T \rho X) + \frac{\kappa^2}{4} |d\rho|_g^2 (g(X, T) Y - g(Y, T) X) \\
&\quad - \frac{\kappa^2}{4} (g(X, T) \nabla_Y \rho - g(Y, T) \nabla_X \rho) \nabla \rho.
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
g(Z, U(X, U(Y, T)) - U(Y, U(X, T))) &= -\frac{\kappa^2}{4} (\nabla_X \rho \nabla_T \rho g(Y, Z) - \nabla_Y \rho \nabla_T \rho g(X, Z)) \\
&\quad + \frac{\kappa^2}{4} |d\rho|_g^2 (g(X, T) g(Y, Z) - g(Y, T) g(X, Z)) \\
&\quad - \frac{\kappa^2}{4} (g(X, T) \nabla_Y \rho - g(Y, T) \nabla_X \rho) \nabla_Z \rho \\
&= \frac{\kappa^2}{4} (d\rho \otimes d\rho) \otimes g(X, Y, Z, T) - \frac{\kappa^2}{8} |d\rho|_g^2 g \otimes g(X, Y, Z, T).
\end{aligned}$$

En additionnant, on a donc :

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{R}}(X, Y, Z, T) &= \varphi^\kappa g\left(Z, \widehat{\mathcal{R}}(X, Y) T\right) \\
&= \varphi^\kappa g\left(Z, \mathcal{R}(X, Y) T + \nabla_X U(Y, T) - \nabla_Y U(X, T) + U(X, U(Y, T)) - U(Y, U(X, T))\right) \\
&= \varphi^\kappa \left(\mathcal{R} + \frac{\kappa^2}{4} (d\rho \otimes d\rho) \otimes g - \frac{\kappa^2}{8} |d\rho|_g^2 g \otimes g - \frac{\kappa}{2} \text{Hess } \rho \otimes g \right) (X, Y, Z, T)
\end{aligned}$$

Calculons Hess ρ :

$$\begin{aligned}
\nabla_{X,Y}\rho &= \nabla_X \nabla_Y \rho - \nabla_{\nabla_X Y} \rho \\
&= \nabla_X \frac{\nabla_Y \varphi}{\varphi} - \frac{\nabla_{\nabla_X Y} \varphi}{\varphi} \\
&= \frac{\nabla_X \nabla_Y \varphi - \nabla_{\nabla_X Y} \varphi}{\varphi} - \frac{\nabla_X \varphi}{\varphi} \frac{\nabla_Y \varphi}{\varphi} \\
&= \frac{\nabla_{X,Y} \varphi}{\varphi} - \frac{\nabla_X \varphi}{\varphi} \frac{\nabla_Y \varphi}{\varphi} \\
\text{Hess } \rho &= \frac{\text{Hess } \varphi}{\varphi} - \frac{d\varphi}{\varphi} \otimes \frac{d\varphi}{\varphi}.
\end{aligned}$$

On obtient finalement :

$$\widehat{\mathcal{R}} = \varphi^\kappa \left(\mathcal{R} + \frac{\kappa^2}{4} \left(\frac{d\varphi}{\varphi} \otimes \frac{d\varphi}{\varphi} - \frac{1}{2} \left| \frac{d\varphi}{\varphi} \right|_g^2 \right) g \otimes g - \frac{\kappa}{2} \left(\frac{\text{Hess } \varphi}{\varphi} - \frac{d\varphi}{\varphi} \otimes \frac{d\varphi}{\varphi} \right) \otimes g \right).$$

□

Nous allons maintenant examiner les transformations du tenseur de Ricci et du scalaire de courbure. Pour cela, on se donne n champs de vecteurs e_1, e_2, \dots, e_n (définis a priori sur un ouvert de M) formant en tout point p une base orthonormée de $T_p M$. Si T est un $(0,2)$ -tenseur, on a alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^n T \otimes g(X, e_i, Y, e_i) &= \sum_{i=0}^n (T(X, Y)g(e_i, e_i) + T(e_i, e_i)g(X, Y) - T(X, e_i)g(Y, e_i) - T(Y, e_i)g(X, e_i)) \\
&= nT(X, Y) + (\text{tr } T)g(X, Y) - 2T(X, Y) \\
&= (n-2)T(X, Y) + (\text{tr } T)g(X, Y)
\end{aligned}$$

En appliquant cette formule au tenseur de Riemann et en remarquant que $\widehat{e}_1 = \varphi^{-\frac{\kappa}{2}} e_1, \dots, \widehat{e}_n = \varphi^{-\frac{\kappa}{2}} e_n$ est en tout point une base orthonormée pour \widehat{g} , on en déduit :

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{R}}\text{ic}(X, Y) &= \sum_{i=0}^n \widehat{\mathcal{R}}(X, \widehat{e}_i, Y, \widehat{e}_i) \\
&= \varphi^{-\kappa} \sum_{i=0}^n \widehat{\mathcal{R}}(X, e_i, Y, e_i) \\
&= \sum_{i=0}^n \mathcal{R}(X, e_i, Y, e_i) + (n-2) \left[\frac{\kappa^2}{4} \left(\frac{\nabla_X \varphi}{\varphi} \frac{\nabla_Y \varphi}{\varphi} - \frac{1}{2} \left| \frac{d\varphi}{\varphi} \right|_g^2 \right) g(X, Y) \right] - \frac{\kappa}{2} \left(\frac{\nabla_{X,Y} \varphi}{\varphi} - \frac{\nabla_X \varphi}{\varphi} \frac{\nabla_Y \varphi}{\varphi} \right) \\
&\quad + \left[\left(1 - \frac{n}{2} \right) \frac{\kappa^2}{4} \left| \frac{d\varphi}{\varphi} \right|_g^2 - \frac{\kappa}{2} \left(\frac{\Delta \varphi}{\varphi} - \left| \frac{d\varphi}{\varphi} \right|_g^2 \right) \right] g(X, Y) \\
&= \mathcal{R}\text{ic}(X, Y) + (n-2) \left[\frac{\kappa^2}{4} \left(\frac{\nabla_X \varphi}{\varphi} \frac{\nabla_Y \varphi}{\varphi} \right) - \frac{\kappa}{2} \left(\frac{\nabla_{X,Y} \varphi}{\varphi} - \frac{\nabla_X \varphi}{\varphi} \frac{\nabla_Y \varphi}{\varphi} \right) \right] \\
&\quad - \left[(n-2) \frac{\kappa^2}{4} \left| \frac{d\varphi}{\varphi} \right|_g^2 + \frac{\kappa}{2} \left(\frac{\Delta \varphi}{\varphi} - \left| \frac{d\varphi}{\varphi} \right|_g^2 \right) \right] g(X, Y)
\end{aligned}$$

On a donc démontré la proposition suivante :

Proposition 1.1.3 (Transformation du tenseur de Ricci). *Le $(0,2)$ -tenseur de Ricci de la métrique $\widehat{g} = \varphi^\kappa g$ est donné par :*

$$\widehat{\mathcal{R}}\text{ic} = \mathcal{R}\text{ic} + (n-2) \left[\frac{\kappa^2}{4} \left(\frac{d\varphi}{\varphi} \otimes \frac{d\varphi}{\varphi} \right) - \frac{\kappa}{2} \left(\frac{\text{Hess } \varphi}{\varphi} - \frac{d\varphi}{\varphi} \otimes \frac{d\varphi}{\varphi} \right) \right] - \left[(n-2) \frac{\kappa^2}{4} \left| \frac{d\varphi}{\varphi} \right|_g^2 + \frac{\kappa}{2} \left(\frac{\Delta \varphi}{\varphi} - \left| \frac{d\varphi}{\varphi} \right|_g^2 \right) \right] g. \tag{1.1.4}$$

En particulier, pour $\kappa = -2$, cette équation se simplifie en :

$$\widehat{\mathcal{R}ic} = \mathcal{R}ic + (n-2) \frac{\text{Hess } \varphi}{\varphi} - \left[(n-1) \left| \frac{d\varphi}{\varphi} \right|_g^2 - \frac{\Delta\varphi}{\varphi} \right] g, \quad (1.1.5)$$

et la partie sans trace du tenseur de Ricci de \widehat{g} est donnée par :

$$\widehat{\mathcal{R}ic}^\circ = \mathcal{R}ic^\circ - (n-2) \frac{\text{Hess } \varphi}{\varphi}. \quad (1.1.6)$$

Finalement, examinons la transformation du scalaire de courbure :

Proposition 1.1.4 (Transformation du scalaire de courbure). *Le scalaire de courbure de la métrique $\widehat{g} = \varphi^\kappa g$ est donné par :*

$$\widehat{\text{Scal}} = \varphi^{-\kappa} \left[\text{Scal} - (n-1)\kappa \frac{\Delta\varphi}{\varphi} + (n-1)\kappa \left(1 - \frac{n-2}{4} \kappa \right) \left| \frac{d\varphi}{\varphi} \right|_g^2 \right]. \quad (1.1.7)$$

En particulier pour $\kappa = \frac{4}{n-2}$,

$$-\frac{4(n-1)}{n-2} \Delta\varphi + \text{Scal } \varphi = \widehat{\text{Scal}} \varphi^{\frac{n+2}{n-2}}. \quad (1.1.8)$$

Démonstration. Reprenons l'expression trouvée pour la contraction du produit de Kulkarni–Nomizu :

$$\sum_{i=0}^n T \otimes g(X, e_i, Y, e_i) = (n-2)T(X, Y) + (\text{tr } T)g(X, Y).$$

En prenant la trace de cette équation, on obtient :

$$\sum_{i,j=0}^n T \otimes g(e_j, e_i, e_j, e_i) = 2(n-1) \text{tr } T.$$

En appliquant, comme précédemment, cette formule au tenseur de Riemann, on obtient :

$$\begin{aligned} \widehat{\text{Scal}} &= \sum_{i,j=0}^n \widehat{\mathcal{R}}(\widehat{e}_j, \widehat{e}_i, \widehat{e}_j, \widehat{e}_i) \\ &= \varphi^{-2\kappa} \sum_{i,j=0}^n \widehat{\mathcal{R}}(e_j, e_i, e_j, e_i) \\ &= \varphi^\kappa \left[\text{Scal} + \frac{(n-1)\kappa^2}{2} \left(1 - \frac{n}{2} \right) \left| \frac{d\varphi}{\varphi} \right|_g^2 - (n-1)\kappa \left(\frac{\Delta\varphi}{\varphi} - \left| \frac{d\varphi}{\varphi} \right|_g^2 \right) \right] \\ &= \varphi^\kappa \left[\text{Scal} - (n-1)\kappa \frac{\Delta\varphi}{\varphi} + (n-1)\kappa \left(1 - \frac{n-2}{4} \kappa \right) \left| \frac{d\varphi}{\varphi} \right|_g^2 \right]. \end{aligned}$$

□

Proposition 1.1.5 (Transformation des tenseurs de Weyl et de Schouten). *Le tenseur de Weyl totalement covariant de la métrique $\widehat{g} = \varphi^\kappa g$ est donné par :*

$$\widehat{\mathcal{W}} = \varphi^\kappa \mathcal{W}, \quad (1.1.9)$$

i.e. le tenseur de Weyl est covariant conforme.

Le tenseur de Schouten de la métrique $\widehat{g} = \varphi^\kappa g$ est donné par :

$$\widehat{\mathcal{P}} = \mathcal{P} + \frac{\kappa^2}{4} \left(\frac{d\varphi}{\varphi} \otimes \frac{d\varphi}{\varphi} - \frac{1}{2} \left| \frac{d\varphi}{\varphi} \right|_g^2 g \right) - \frac{\kappa}{2} \left(\frac{\text{Hess } \varphi}{\varphi} - \frac{d\varphi}{\varphi} \otimes \frac{d\varphi}{\varphi} \right). \quad (1.1.10)$$

En particulier pour $\kappa = -2$:

$$\widehat{\mathcal{P}} = \mathcal{P} + \frac{\text{Hess } \varphi}{\varphi} - \frac{1}{2} \left| \frac{d\varphi}{\varphi} \right|_g^2. \quad (1.1.11)$$

Démonstration. La preuve est immédiate en observant la transformation du tenseur de Riemann (1.1.2) et la décomposition du tenseur de Riemann (??). \square

Proposition 1.1.6 (Transformation du tenseur de Cotton-York). *Le tenseur de Cotton-York de la métrique $\widehat{g} = \varphi^{-2}g$ est donné par :*

$$\widehat{\mathcal{C}}(X, Y, Z) = \mathcal{C}(X, Y, Z) + \mathcal{W}(X, Y, Z, \frac{\nabla \varphi}{\varphi}) \quad (1.1.12)$$

Démonstration. Par définition du tenseur de Cotton-York,

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{C}}(X, Y, Z) &= \widehat{\nabla}_X \widehat{\mathcal{P}}(Y, Z) - \widehat{\nabla}_Y \widehat{\mathcal{P}}(X, Z) \\ &= \nabla_X \widehat{\mathcal{P}}(Y, Z) - \widehat{\mathcal{P}}(U(X, Y), Z) - \widehat{\mathcal{P}}(Y, U(X, Z)) - \nabla_Y \widehat{\mathcal{P}}(X, Z) + \widehat{\mathcal{P}}(U(Y, X), Z) + \widehat{\mathcal{P}}(X, U(Y, Z)) \\ &= \left(\nabla_X \widehat{\mathcal{P}}(Y, Z) - \nabla_Y \widehat{\mathcal{P}}(X, Z) \right) + \left(\widehat{\mathcal{P}}(X, U(Y, Z)) - \widehat{\mathcal{P}}(Y, U(X, Z)) \right), \end{aligned}$$

où on a utilisé la symétrie du tenseur $U : U(X, Y) = U(Y, X)$. Remarquons que chacun des deux termes entre parenthèse est antisymétrique en X et Y . Calculons-les séparément. En utilisant la transformation conforme du tenseur de Schouten (1.1.11), on a :

$$\begin{aligned} \nabla_X \widehat{\mathcal{P}}(Y, Z) &= \nabla_X \mathcal{P}(Y, Z) + \frac{\nabla_{X,Y,Z} \varphi}{\varphi} - \frac{\nabla_X \varphi}{\varphi} \frac{\nabla_{Y,Z} \varphi}{\varphi} - \frac{1}{2} \nabla_X \left[g \left(\frac{\nabla \varphi}{\varphi}, \frac{\nabla \varphi}{\varphi} \right) \right] \\ &= \nabla_X \mathcal{P}(Y, Z) + \frac{\nabla_{X,Y,Z} \varphi}{\varphi} - \frac{\nabla_X \varphi}{\varphi} \frac{\nabla_{Y,Z} \varphi}{\varphi} - g \left(\frac{\nabla_X \nabla \varphi}{\varphi} - \frac{\nabla_X \varphi}{\varphi} \frac{\nabla \varphi}{\varphi}, \frac{\nabla \varphi}{\varphi} \right) g(Y, Z) \\ &= \nabla_X \mathcal{P}(Y, Z) + \frac{\nabla_{X,Y,Z} \varphi}{\varphi} - \frac{\nabla_X \varphi}{\varphi} \frac{\nabla_{Y,Z} \varphi}{\varphi} - \frac{\nabla_{X, \frac{\nabla \varphi}{\varphi}} \varphi}{\varphi} g(Y, Z) + \frac{\nabla_X \varphi}{\varphi} \left| \frac{d\varphi}{\varphi} \right|_g^2 g(Y, Z). \end{aligned}$$

En antisymétrisant par rapport à X et Y , on obtient donc :

$$\begin{aligned} \nabla_X \widehat{\mathcal{P}}(Y, Z) - \nabla_Y \widehat{\mathcal{P}}(X, Z) &= \mathcal{C}(X, Y, Z) - \frac{d\varphi}{\varphi} (\mathcal{R}(X, Y)Z) - \left(\frac{\nabla_X \varphi}{\varphi} \frac{\nabla_{Y,Z} \varphi}{\varphi} - \frac{\nabla_Y \varphi}{\varphi} \frac{\nabla_{X,Z} \varphi}{\varphi} \right) \\ &\quad - \left(\frac{\nabla_{X, \frac{\nabla \varphi}{\varphi}} \varphi}{\varphi} g(Y, Z) - \frac{\nabla_{Y, \frac{\nabla \varphi}{\varphi}} \varphi}{\varphi} g(X, Z) \right) \\ &\quad + \left| \frac{d\varphi}{\varphi} \right|_g^2 \left(\frac{\nabla_X \varphi}{\varphi} g(Y, Z) - \frac{\nabla_Y \varphi}{\varphi} g(X, Z) \right). \end{aligned}$$

Calculons maintenant le second terme :

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{P}}(X, U(Y, Z)) &= -\widehat{\mathcal{P}}(X, Y) \frac{\nabla_Z \varphi}{\varphi} - \widehat{\mathcal{P}}(X, Z) \frac{\nabla_Y \varphi}{\varphi} + g(Y, Z) \widehat{\mathcal{P}}(X, \frac{\nabla \varphi}{\varphi}) \\ &= -\mathcal{P}(X, Y) \frac{\nabla_Z \varphi}{\varphi} - \mathcal{P}(X, Z) \frac{\nabla_Y \varphi}{\varphi} + g(Y, Z) \mathcal{P}(X, \frac{\nabla \varphi}{\varphi}) \\ &\quad - \frac{\nabla_{X,Y} \varphi}{\varphi} \frac{\nabla_Z \varphi}{\varphi} - \frac{\nabla_{X,Z} \varphi}{\varphi} \frac{\nabla_Y \varphi}{\varphi} + g(Y, Z) \frac{\nabla_{X, \frac{\nabla \varphi}{\varphi}} \varphi}{\varphi} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left| \frac{d\varphi}{\varphi} \right|_g^2 \left(g(X, Y) \frac{\nabla_X \varphi}{\varphi} + g(X, Z) \frac{\nabla_Y \varphi}{\varphi} - g(Y, Z) \frac{\nabla_X \varphi}{\varphi} \right). \end{aligned}$$

Comme précédemment, en antisymétrisant par rapport à X et Y , on a :

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{P}}(X, U(Y, Z)) - \widehat{\mathcal{P}}(Y, U(X, Z)) &= \mathcal{P}(Y, Z) \frac{\nabla_X \varphi}{\varphi} - \mathcal{P}(X, Z) \frac{\nabla_Y \varphi}{\varphi} + g(Y, Z) \mathcal{P}(X, \frac{\nabla \varphi}{\varphi}) - g(X, Z) \mathcal{P}(Y, \frac{\nabla \varphi}{\varphi}) \\ &+ \frac{\nabla_{Y, Z} \varphi}{\varphi} \frac{\nabla_X \varphi}{\varphi} - \frac{\nabla_{X, Z} \varphi}{\varphi} \frac{\nabla_Y \varphi}{\varphi} + g(Y, Z) \frac{\nabla_{X, \frac{\nabla \varphi}{\varphi}} \varphi}{\varphi} - g(X, Z) \frac{\nabla_{Y, \frac{\nabla \varphi}{\varphi}} \varphi}{\varphi} \\ &+ \left| \frac{d\varphi}{\varphi} \right|_g^2 \left(g(X, Z) \frac{\nabla_Y \varphi}{\varphi} - g(Y, Z) \frac{\nabla_X \varphi}{\varphi} \right). \end{aligned}$$

Finalement, en additionnant les deux expressions trouvées, la formule pour $\widehat{\mathcal{C}}(X, Y, Z)$ se simplifie en :

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{C}}(X, Y, Z) &= \mathcal{C}(X, Y, Z) - \frac{d\varphi}{\varphi} (\mathcal{R}(X, Y)Z) \\ &+ \mathcal{P}(Y, Z) \frac{\nabla_X \varphi}{\varphi} - \mathcal{P}(X, Z) \frac{\nabla_Y \varphi}{\varphi} + g(Y, Z) \mathcal{P}(X, \frac{\nabla \varphi}{\varphi}) - g(X, Z) \mathcal{P}(Y, \frac{\nabla \varphi}{\varphi}) \\ &= \mathcal{C}(X, Y, Z) - \mathcal{R} \left(X, Y, \frac{\nabla \varphi}{\varphi}, Z \right) \\ &+ \mathcal{P}(Y, Z) g \left(X, \frac{\nabla \varphi}{\varphi} \right) - \mathcal{P}(X, Z) g \left(Y, \frac{\nabla \varphi}{\varphi} \right) + g(Y, Z) \mathcal{P}(X, \frac{\nabla \varphi}{\varphi}) - g(X, Z) \mathcal{P}(Y, \frac{\nabla \varphi}{\varphi}) \\ &= \mathcal{C}(X, Y, Z) - \mathcal{R} \left(X, Y, \frac{\nabla \varphi}{\varphi}, Z \right) + \mathcal{P} \circledast g \left(X, Y, \frac{\nabla \varphi}{\varphi}, Z \right) \\ &= \mathcal{C}(X, Y, Z) - \mathcal{W} \left(X, Y, \frac{\nabla \varphi}{\varphi}, Z \right). \end{aligned}$$

□

1.1.2 Transformation de la seconde forme fondamentale d'une hypersurface

Soit Σ une hypersurface de M . Choisissons sur Σ un vecteur unitaire orthonormal à Σ . Rappelons que la seconde forme fondamentale de Σ est donnée par :

$$S(X, Y) = g(X, \nabla_Y N),$$

où X et Y sont deux vecteurs tangents à Σ .

Proposition 1.1.7 (Transformation de la seconde forme fondamentale). *La seconde forme fondamentale de Σ pour la métrique $\widehat{g} = \varphi^\kappa g$ est donné par :*

$$\widehat{S} = \varphi^{\frac{\kappa}{2}} \left(S + \frac{\kappa}{2} \frac{\nabla_N \varphi}{\varphi} g^\Sigma \right). \quad (1.1.13)$$

La courbure moyenne \widehat{H} de Σ pour la métrique \widehat{g} est donnée par :

$$\widehat{H} = \varphi^{-\frac{\kappa}{2}} \left(H + (n-1) \frac{\kappa}{2} \frac{\nabla_N \varphi}{\varphi} \right). \quad (1.1.14)$$

Remarque : A un facteur multiplicatif près, la partie sans trace de la seconde forme fondamentale est inchangée.

Démonstration. La seconde forme fondamentale de Σ pour la métrique \widehat{g} est donnée par :

$$\widehat{S}(X, Y) = \widehat{g}(X, \widehat{\nabla}_Y \widehat{N}),$$

où \widehat{N} est un vecteur unitaire orthogonal à Σ pour la métrique \widehat{g} . On a facilement que le vecteur $\widehat{N} = \varphi^{-\frac{\kappa}{2}}N$ satisfait à ces hypothèses. La seconde forme fondamentale est alors donnée par :

$$\begin{aligned}
\widehat{S}(X, Y) &= \widehat{g}(X, \widehat{\nabla}_Y \widehat{N}) \\
&= \varphi^\kappa g\left(X, \widehat{\nabla}_Y(\varphi^{-\frac{\kappa}{2}}N)\right) \\
&= \varphi^{\frac{\kappa}{2}} g\left(X, \widehat{\nabla}_Y N - \frac{\kappa}{2} \frac{\widehat{\nabla}_Y \varphi}{\varphi} N\right) \\
&= \varphi^{\frac{\kappa}{2}} g(X, \nabla_Y N + U(Y, N)) \quad (\text{Car } N \text{ est orthogonal à } X) \\
&= \varphi^{\frac{\kappa}{2}} \left(S(X, Y) + \frac{\kappa}{2} \frac{\nabla_N \varphi}{\varphi} g(X, Y)\right).
\end{aligned}$$

□

Transformation de la hessienne d'une fonction

Soit $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction \mathcal{C}^2 .

Proposition 1.1.8 (Transformation de la hessienne d'une fonction).

$$\widehat{\nabla}_{X,Y} f = \nabla_{X,Y} f - \frac{\kappa}{2} \left(\frac{\nabla_X \varphi}{\varphi} \nabla_Y f + \frac{\nabla_Y \varphi}{\varphi} \nabla_X f - g(X, Y) g\left(\frac{\nabla \varphi}{\varphi}, \nabla f\right) \right) \quad (1.1.15)$$

$$\widehat{\Delta} f = \varphi^{-\kappa} \left[\Delta f + \frac{\kappa}{2} (n-2) g\left(\frac{\nabla \varphi}{\varphi}, \nabla f\right) \right]. \quad (1.1.16)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\widehat{\nabla}_{X,Y} f &= \widehat{\nabla}_X \widehat{\nabla}_Y f - \widehat{\nabla}_{\widehat{\nabla}_X Y} f \\
&= \nabla_X \nabla_Y f - \nabla_{\nabla_X Y} f - \nabla_{U(X,Y)} f \\
&= \nabla_{X,Y} f - \frac{\kappa}{2} \left(\frac{\nabla_X \varphi}{\varphi} \nabla_Y f + \frac{\nabla_Y \varphi}{\varphi} \nabla_X f - g(X, Y) g(\nabla \varphi, \nabla f) \right)
\end{aligned}$$

Le laplacien de f est alors donné par :

$$\begin{aligned}
\widehat{\Delta} f &= \text{tr}_{\widehat{g}} \widehat{\text{Hess}} f \\
&= \sum_i \widehat{\nabla}_{\widehat{e}_i} \widehat{e}_i f \\
&= \varphi^{-\kappa} \sum_i \nabla_{e_i, e_i} f - \frac{\kappa}{2} \left(\frac{\nabla_{e_i} \varphi}{\varphi} \nabla_{e_i} f + \frac{\nabla_{e_i} \varphi}{\varphi} \nabla_{e_i} f - g(e_i, e_i) g(\nabla \varphi, \nabla f) \right) \\
&= \varphi^{-\kappa} \left(\Delta f - \frac{\kappa}{2} (2-n) g(\nabla \varphi, \nabla f) \right)
\end{aligned}$$

□

Le problème de Yamabe

Variétés localement conformément plates

Définition 1.1.9. Soit (M^n, g) une variété riemannienne. (M^n, g) est dite localement conformément plate si pour tout point p de M , il existe une carte locale $M \supset U \rightarrow \mathbb{R}^n$ et une fonction $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ telle que, dans cette carte, $\varphi^2 g = \delta$ la métrique euclidienne.

On voit facilement que les tenseurs de Weyl et de Cotton–York d'une telle variété sont nuls. Il s'avère que, réciproquement, l'annulation de ces deux tenseurs caractérise les variétés localement conformément plates. Comme nous serons intéressés par ce théorème avec peu de régularité (métrique $W^{2,p}$), nous en donnons les preuves (Dire que Bianchi 2 valable au sens des distributions).

Lemme 1.1.10 (Divergence du tenseur de Weyl). *Si g est une métrique $W^{2,p}$, on a la formule suivante au sens des distributions :*

$$\nabla^\mu \mathcal{W}_{\mu\nu\rho\sigma} = (n-3)\mathcal{C}_{\rho\sigma\nu} \quad (1.1.17)$$

Démonstration. En contractant la seconde identité de Bianchi (??), on obtient :

$$\begin{aligned} \nabla^\mu \mathcal{R}_{\mu\nu\rho\sigma} + \nabla_\rho \mathcal{R}_{\mu\nu\sigma}{}^\mu + \nabla_\sigma \mathcal{R}_{\mu\nu}{}^\mu{}_\rho &= 0 \\ \nabla^\mu \mathcal{R}_{\mu\nu\rho\sigma} - \nabla_\rho \mathcal{R}ic_{\nu\sigma} + \nabla_\sigma \mathcal{R}ic_{\nu\rho} &= 0. \end{aligned}$$

Décomposons maintenant \mathcal{R} en $\mathcal{P} \otimes g + \mathcal{W}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\mu\nu\rho\sigma} &= \mathcal{P}_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} + \mathcal{P}_{\nu\sigma}g_{\mu\rho} - \mathcal{P}_{\mu\sigma}g_{\nu\rho} - \mathcal{P}_{\nu\rho}g_{\mu\sigma} + \mathcal{W}_{\mu\nu\rho\sigma} \\ \nabla_\rho \mathcal{R}ic_{\nu\sigma} - \nabla_\sigma \mathcal{R}ic_{\nu\rho} &= \nabla^\mu \mathcal{W}_{\mu\nu\rho\sigma} + \nabla^\mu \mathcal{P}_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} + \nabla^\mu \mathcal{P}_{\nu\sigma}g_{\mu\rho} - \nabla^\mu \mathcal{P}_{\mu\sigma}g_{\nu\rho} - \nabla^\mu \mathcal{P}_{\nu\rho}g_{\mu\sigma} \\ &= \nabla^\mu \mathcal{W}_{\mu\nu\rho\sigma} + \nabla_\rho \mathcal{P}_{\nu\sigma} - \nabla_\sigma \mathcal{P}_{\nu\rho} + \frac{1}{2(n-1)} (\nabla_\rho \text{Scal } g_{\nu\sigma} - \nabla_\sigma \text{Scal } g_{\nu\rho}), \end{aligned}$$

où on a utilisé $\nabla^\mu \mathcal{P}_{\mu\nu} = \frac{1}{2(n-1)} \nabla_\nu \text{Scal}$. Cette formule est une conséquence directe de la définition du tenseur de Schouten (??) et de la nullité de la divergence du tenseur d'Einstein (??). Finalement on obtient :

$$\begin{aligned} \nabla^\mu \mathcal{W}_{\mu\nu\rho\sigma} &= \nabla_\rho \left(\mathcal{R}ic_{\nu\sigma} - \frac{1}{2(n-1)} \text{Scal } g_{\nu\sigma} \right) - \nabla_\sigma \left(\mathcal{R}ic_{\nu\rho} - \frac{1}{2(n-1)} \text{Scal } g_{\nu\rho} \right) - \nabla_\rho \mathcal{P}_{\nu\sigma} + \nabla_\sigma \mathcal{P}_{\nu\rho} \\ &= (n-2)\mathcal{C}_{\rho\sigma\nu} - \mathcal{C}_{\rho\sigma\nu} \\ &= (n-3)\mathcal{C}_{\rho\sigma\nu}. \end{aligned}$$

□

Théorème 1.1.11 (Weyl–Schouten). *Soit (M^n, g) une variété riemannienne. Alors :*

- si $n = 3$, M est localement conformément plate si et seulement si le tenseur de Cotton–York est nul
- si $n > 3$, M est localement conformément plate si et seulement si le tenseur de Weyl est nul.

Démonstration. Le lemme précédent montre que si $n > 3$ et que le tenseur de Weyl est nul, alors le tenseur de Cotton–York de (M, g) s'annule.

□

Corollaire 1.1.12. *(M, g) admet une structure de variété C^∞ et il existe dans la classe conforme de g , une métrique lisse.*

Théorème 1.1.13 (Kuiper). *Soit (M, g) une variété simplement connexe localement conformément plate. Il existe une immersion conforme $M \rightarrow \mathbb{S}^n$. En particulier, si M est compacte, cette application est un difféomorphisme conforme.*

La preuve que nous donnons ici suit celle de R. Howard *****.

Démonstration.

□

***** Classification des variétés localement conformément plates de Schoen et Yau *****

1.1.3 Variation au premier ordre des tenseurs

Soit $g : U \rightarrow \Gamma(\text{Sym } T^{*2}M)$ une famille lisse à un paramètre de métriques (où U désigne un ouvert de \mathbb{R} contenant 0). Posons $h = \frac{\partial g_i}{\partial t}(t=0)$. On souhaite calculer la variation au premier ordre des quantités naturellement associées à g_t . Les calculs étant plus simples en coordonnées, c'est avec cette notation que nous travaillerons systématiquement.

Lemme 1.1.14.

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial t} = -g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}h_{\rho\sigma} \quad (1.1.18)$$

Démonstration. En effet, $g^{\mu\sigma}g_{\sigma\rho} = \delta^\mu_\rho$. Donc :

$$0 = \frac{\partial \delta^\mu_\sigma}{\partial t} = \frac{\partial g^{\mu\rho}}{\partial t} g_{\rho\sigma} + g^{\mu\rho} \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial t}.$$

En contractant avec $g^{\rho\nu}$:

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial t} = \frac{\partial g^{\mu\sigma}}{\partial t} g_{\rho\sigma} g^{\sigma\nu} = -g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial t}$$

□

Lemme 1.1.15.

$$\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\rho}{\partial t} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\nabla_\mu g_{\sigma\nu} + \nabla_\nu g_{\mu\sigma} - \nabla_\sigma g_{\mu\nu}) \quad (1.1.19)$$

Démonstration. Les deux membres étant des tenseurs, on peut se placer en coordonnées normales en un point x et donc supposer que les coefficients de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^\rho(x)$ sont nuls à la date $t = 0$, donc en particulier, les dérivées (premières) covariantes coïncident avec les dérivées standards. On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\rho}{\partial t}(x) &= \frac{1}{2} \frac{\partial g^{\rho\sigma}}{\partial t} (\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) + \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\mu h_{\sigma\nu} + \partial_\nu h_{\mu\sigma} - \partial_\sigma h_{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\nabla_\mu h_{\sigma\nu} + \nabla_\nu h_{\mu\sigma} - \nabla_\sigma h_{\mu\nu}). \end{aligned}$$

En effet, le premier terme est nul car :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial g^{\rho\sigma}}{\partial t} (\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) = -g^{\rho\alpha} h_{\alpha\beta} g^{\beta\sigma} \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) = -g^{\rho\alpha} h_{\alpha\beta} \Gamma_{\mu\nu}^\beta.$$

□

Proposition 1.1.16 (Variation des tenseurs de courbure).

$$\frac{\partial \mathcal{R}^\sigma_{\rho\mu\nu}}{\partial t} = \frac{1}{2} g^{\sigma\alpha} (\nabla_\mu \nabla_\rho h_{\nu\alpha} + \nabla_\nu \nabla_\alpha h_{\mu\rho} - \nabla_\mu \nabla_\alpha h_{\nu\rho} - \nabla_\nu \nabla_\rho h_{\mu\alpha} - \mathcal{R}^\beta_{\rho\mu\nu} h_{\alpha\beta} - \mathcal{R}^\beta_{\alpha\mu\nu} h_{\rho\beta}) \quad (1.1.20)$$

$$\frac{\partial \text{Ric}_{\rho\nu}}{\partial t} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\nabla_\beta \nabla_\rho h_{\alpha\nu} + \nabla_\nu \nabla_\beta h_{\rho\alpha} - \nabla_\beta \nabla_\alpha h_{\rho\nu} - \nabla_\nu \nabla_\rho h_{\alpha\beta}) \quad (1.1.21)$$

$$= -\frac{1}{2} (\Delta_L h_{\rho\nu} + \nabla_{\nu,\rho}(\text{tr } h) - \nabla_\rho(\text{div } h)_\nu - \nabla_\nu(\text{div } h)_\rho) \quad (1.1.22)$$

$$\frac{\partial \text{Scal}}{\partial t} = -\Delta \text{tr } h + \nabla_\mu \nabla_\nu h^{\mu\nu} - \text{Ric}^{\mu\nu} h_{\rho\nu}. \quad (1.1.23)$$

Démonstration. Comme pour le lemme précédent, on peut se placer en coordonnées normales en un point x . On a alors $\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = 0$ et :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{R}^\sigma_{\rho\mu\nu}}{\partial t}(x) &= \partial_\mu \frac{\partial \Gamma_{\rho\nu}^\sigma}{\partial t} - \partial_\nu \frac{\partial \Gamma_{\rho\mu}^\sigma}{\partial t} \\ &= \nabla_\mu \frac{\partial \Gamma_{\rho\nu}^\sigma}{\partial t} - \nabla_\nu \frac{\partial \Gamma_{\rho\mu}^\sigma}{\partial t} \\ &= \frac{1}{2} g^{\sigma\alpha} (\nabla_\mu \nabla_\rho h_{\alpha\nu} + \nabla_\mu \nabla_\nu h_{\rho\alpha} - \nabla_\mu \nabla_\alpha h_{\rho\nu} - \nabla_\nu \nabla_\rho h_{\mu\alpha} - \nabla_\nu \nabla_\mu h_{\rho\alpha} + \nabla_\nu \nabla_\alpha h_{\mu\rho}) \\ &= \frac{1}{2} g^{\sigma\alpha} (\nabla_\mu \nabla_\rho h_{\nu\alpha} + \nabla_\nu \nabla_\alpha h_{\mu\rho} - \nabla_\mu \nabla_\alpha h_{\nu\rho} - \nabla_\nu \nabla_\rho h_{\mu\alpha} - \mathcal{R}^\beta_{\rho\mu\nu} h_{\alpha\beta} - \mathcal{R}^\beta_{\alpha\mu\nu} h_{\rho\beta}), \end{aligned}$$

ce qui prouve la formule (1.1.20).

En prenant la trace sur les variables μ et σ de l'avant dernière équation, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{R}ic_{\rho\nu}}{\partial t} &= \frac{1}{2} g^{\sigma\alpha} (\nabla_\sigma \nabla_\rho h_{\alpha\nu} + \nabla_\sigma \nabla_\nu h_{\rho\alpha} - \nabla_\sigma \nabla_\alpha h_{\rho\nu} - \nabla_\nu \nabla_\rho h_{\sigma\alpha} - \nabla_\nu \nabla_\sigma h_{\rho\alpha} + \nabla_\nu \nabla_\alpha h_{\sigma\rho}) \\
&= \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\nabla_\beta \nabla_\rho h_{\alpha\nu} + \nabla_\beta \nabla_\nu h_{\rho\alpha} - \nabla_\beta \nabla_\alpha h_{\rho\nu} - \nabla_\nu \nabla_\rho h_{\alpha\beta}) \quad (\text{équation (1.1.21)}) \\
&= -\frac{1}{2} (\Delta h_{\rho\nu} + \nabla_{\nu,\rho}(\text{tr } h)) + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\nabla_\beta \nabla_\rho h_{\alpha\nu} + \nabla_\beta \nabla_\nu h_{\rho\alpha}) \\
&= -\frac{1}{2} (\Delta h_{\rho\nu} + \nabla_{\nu,\rho}(\text{tr } h) - \nabla_\rho(\text{div } h)_\nu - \nabla_\nu(\text{div } h)_\rho) \\
&\quad - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\mathcal{R}^\sigma_{\alpha\beta\rho} h_{\sigma\nu} + \mathcal{R}^\sigma_{\nu\beta\rho} h_{\alpha\sigma} + \mathcal{R}^\sigma_{\rho\beta\nu} h_{\sigma\alpha} + \mathcal{R}^\sigma_{\alpha\beta\nu} h_{\rho\sigma}) \\
&= -\frac{1}{2} (\Delta h_{\rho\nu} + \nabla_{\nu,\rho}(\text{tr } h) - \nabla_\rho(\text{div } h)_\nu - \nabla_\nu(\text{div } h)_\rho) \\
&\quad + \frac{1}{2} (\mathcal{R}ic^\sigma_{\rho} h_{\sigma\nu} + \mathcal{R}ic^\sigma_{\nu} h_{\rho\sigma} - 2\mathcal{R}^\alpha_{\nu}{}^\beta h_{\alpha\beta}) \\
&= -\frac{1}{2} (\Delta_L h_{\rho\nu} + \nabla_{\nu,\rho}(\text{tr } h) - \nabla_\rho(\text{div } h)_\nu - \nabla_\nu(\text{div } h)_\rho) \quad (\text{équation (1.1.22)}).
\end{aligned}$$

Montrons finalement l'équation (1.1.23) :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \text{Scal}}{\partial t} &= \frac{\partial g^{\nu\rho} \mathcal{R}ic_{\nu\rho}}{\partial t} \\
&= g^{\nu\rho} \frac{\partial \mathcal{R}ic_{\nu\rho}}{\partial t} - \mathcal{R}ic_{\nu\rho} g^{\nu\alpha} g^{\rho\beta} h_{\alpha\beta} \quad (\text{en utilisant (1.1.19)}) \\
&= -\Delta \text{tr } h + \nabla_\mu \nabla_\nu h^{\mu\nu} - \mathcal{R}ic^{\mu\nu} h_{\rho\nu}.
\end{aligned}$$

□

Corollaire 1.1.17 (Variation des tenseurs de Weyl et de Schouten).

Démonstration.

□

Proposition 1.1.18 (Variation du volume).

$$\frac{\partial}{\partial t} d\mu_g = \frac{\text{tr } h}{2} d\mu_g \quad (1.1.24)$$

Démonstration. La forme de volume est donnée par :

$$d\mu_g = \sqrt{\det(g)} d\mu_{eucl},$$

où $g = (g_{\mu\nu})$ est la matrice de g en coordonnées. On a donc :

$$\frac{\partial}{\partial t} d\mu_g = \frac{1}{2\sqrt{\det(g)}} \frac{\partial}{\partial t} \det(g) d\mu_{eucl}.$$

Or $\frac{\partial}{\partial t} \det(g) = \det(g) \text{tr } g^{-1} h$ donc :

$$\frac{\partial}{\partial t} d\mu_g = \frac{g^{\mu\nu} h_{\mu\nu}}{2} \sqrt{\det(g)} d\mu_{eucl}.$$

□

Corollaire 1.1.19 (Variation de l'action d'Einstein-Hilbert).

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_M \text{Scal} d\mu_g = \int_M \left(\mathcal{R}ic^{\mu\nu} - \frac{\text{Scal}}{2} g^{\mu\nu} \right) h_{\mu\nu} d\mu_g \quad (1.1.25)$$

1.1.4 Variétés d'Einstein

Dans tout ce paragraphe, (M^n, g) désigne une variété riemannienne de dimension n .

Définition 1.1.20 (Variété d'Einstein). *On dit que (M^n, g) est une **variété d'Einstein** s'il existe une constante Λ telle que :*

$$\mathcal{R}ic_g = \Lambda g. \quad (1.1.26)$$

Par analogie avec la physique, nous appellerons Λ la **constante cosmologique** de M . On posera $\lambda = \frac{\Lambda}{n-1}$ de sorte que si (M, g) est une variété à courbure constante $\text{sec} = \lambda$, $\mathcal{R}ic = \Lambda g$.

En dimension $n \geq 3$, cette propriété est équivalente à

$$\overset{\circ}{\mathcal{R}}ic_g = 0.$$

C'est une conséquence directe de l'équation (??) (divergence du tenseur d'Einstein). En effet, si $\overset{\circ}{\mathcal{R}}ic_g = 0$, il existe une fonction f telle que $\mathcal{R}ic_g = f g$. On a donc $\text{Scal} = nf$ et

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla^i \left(\mathcal{R}ic_{ij} - \frac{\text{Scal}}{2} g_{ij} \right) \quad (\text{équation (??)}) \\ &= \nabla^i ((2-n)f g_{ij}) \\ &= (2-n)\nabla_i f, \end{aligned}$$

ce qui prouve que, si $n \neq 2$, f est une fonction constante. La réciproque est triviale.

Pour une variété d'Einstein, l'expression du tenseur de Riemann (0.2.1) se simplifie donc en :

$$\mathcal{R} = \frac{\text{Scal}}{2n(n-1)} g \otimes g + \mathcal{W} = \frac{\lambda}{2} g \otimes g + \mathcal{W}. \quad (1.1.27)$$

Remarquons que, dans la formule (??) du laplacien du tenseur de Riemann, les dérivées covariantes du tenseur de Ricci disparaissent. Comme toute l'information sur la courbure est alors contenue dans le tenseur de Weyl, on obtient alors la proposition suivante :

Proposition 1.1.21 (laplacien du tenseur de Weyl sur une variété d'Einstein). *Si (M^n, g) est une variété d'Einstein,*

$$\mathcal{R}ic = (n-1)\lambda g,$$

le laplacien du tenseur de Weyl est donné par :

$$\Delta \mathcal{W}_{\alpha\beta\gamma\delta} = 2(n-1)\lambda \mathcal{W}_{\alpha\beta\gamma\delta} - 2 \left(\tilde{\mathcal{B}}_{\alpha\beta\gamma\delta} - \tilde{\mathcal{B}}_{\alpha\beta\delta\gamma} + \tilde{\mathcal{B}}_{\alpha\gamma\beta\delta} - \tilde{\mathcal{B}}_{\alpha\delta\beta\gamma} \right), \quad (1.1.28)$$

où $\tilde{\mathcal{B}}$ est donné par :

$$\tilde{\mathcal{B}}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \mathcal{W}^{\mu}_{\alpha}{}^{\nu}_{\beta} \mathcal{W}_{\mu\gamma\nu\delta}.$$

Démonstration. La preuve est un calcul direct. Calculons tout d'abord le tenseur \mathcal{B} :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \mathcal{R}^i{}_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\beta} \mathcal{R}_{\mu\gamma\nu\delta} \\ &= \left[\lambda \left(g^{\mu\nu} g_{\alpha\beta} - g^{\mu}{}_{\beta} g^{\nu}{}_{\alpha} \right) + \mathcal{W}^{\mu}{}_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\beta} \right] \mathcal{R}_{\mu\gamma\nu\delta} \\ &= \lambda g_{\alpha\beta} \mathcal{R}ic_{\gamma\delta} - \lambda \mathcal{R}_{\beta\gamma\alpha\delta} + \mathcal{W}^{\mu}{}_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\beta} \mathcal{R}_{\mu\gamma\nu\delta} \\ &= (n-1)\lambda^2 g_{\alpha\beta} g_{\gamma\delta} - \lambda^2 (g_{\alpha\beta} g_{\gamma\delta} - g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta}) - \lambda \mathcal{W}_{\beta\gamma\alpha\delta} + \mathcal{W}^{\mu}{}_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\beta} [\lambda (g_{\mu\nu} g_{\gamma\delta} - g_{\mu\delta} g_{\gamma\nu}) + \mathcal{W}_{\mu\gamma\nu\delta}] \\ &= \lambda^2 g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} - 2\lambda \mathcal{W}_{\beta\gamma\alpha\delta} + \mathcal{W}^{\mu}{}_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\beta} \mathcal{W}_{\mu\gamma\nu\delta} \\ &= \lambda^2 g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} - 2\lambda \mathcal{W}_{\beta\gamma\alpha\delta} + \tilde{\mathcal{B}}_{\mu\gamma\nu\delta}. \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \mathcal{R}ic^k{}_{\alpha} \mathcal{R}_{k\beta\gamma\delta} - \mathcal{R}ic^k{}_{\beta} \mathcal{R}_{k\alpha\gamma\delta} - 2(\mathcal{B}_{\alpha\beta\gamma\delta} - \mathcal{B}_{\alpha\beta\delta\gamma} + \mathcal{B}_{\alpha\gamma\beta\delta} - \mathcal{B}_{\alpha\delta\beta\gamma}) \\ &= 2(n-1)\lambda \mathcal{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} - 2\lambda^2 (g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma} + g_{\alpha\beta} g_{\gamma\delta} - g_{\alpha\beta} g_{\gamma\delta}) \\ &\quad - 4\lambda (\mathcal{W}_{\beta\gamma\alpha\delta} - \mathcal{W}_{\beta\delta\alpha\gamma} + \mathcal{W}_{\gamma\beta\alpha\delta} - \mathcal{W}_{\delta\beta\alpha\gamma}) - 2 \left(\tilde{\mathcal{B}}_{\alpha\beta\gamma\delta} - \tilde{\mathcal{B}}_{\alpha\beta\delta\gamma} + \tilde{\mathcal{B}}_{\alpha\gamma\beta\delta} - \tilde{\mathcal{B}}_{\alpha\delta\beta\gamma} \right) \\ &= 2(n-1)\lambda \mathcal{W}_{\alpha\beta\gamma\delta} - 2 \left(\tilde{\mathcal{B}}_{\alpha\beta\gamma\delta} - \tilde{\mathcal{B}}_{\alpha\beta\delta\gamma} + \tilde{\mathcal{B}}_{\alpha\gamma\beta\delta} - \tilde{\mathcal{B}}_{\alpha\delta\beta\gamma} \right). \end{aligned}$$

D'où le résultat en remarquant que, par compatibilité de la métrique avec la connexion,

$$\Delta \mathcal{R} = \Delta \left(\frac{\lambda}{2} g \otimes g + \mathcal{W} \right) = \Delta \mathcal{W}.$$

□

Proposition 1.1.22 (laplacien de la partie sans trace de la hessienne d'une fonction sur une variété d'Einstein). *Soit $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse. Si (M^n, g) est une variété d'Einstein,*

$$\text{Ric} = (n-1)\lambda g,$$

le laplacien de la hessienne de f est donné par :

$$\Delta \nabla_{\alpha, \beta} f = \nabla_{\alpha, \beta} \Delta f - 2(n+1) \nabla_{\alpha, \beta} f + 2\mathcal{W}^{\mu \nu}_{\alpha \beta} \nabla_{\mu, \nu} f + 2\Delta f g_{\alpha\beta}, \quad (1.1.29)$$

donc le laplacien de la partie sans trace de la hessienne est donné par :

$$\Delta \overset{\circ}{\nabla}_{\alpha, \beta} f = \overset{\circ}{\nabla}_{\alpha, \beta} \Delta f - 2(n+1) \nabla_{\alpha, \beta} f + 2\mathcal{W}^{\mu \nu}_{\alpha \beta} \nabla_{\mu, \nu} f + 2\Delta f g_{\alpha\beta}. \quad (1.1.30)$$

Comme nous l'avons remarqué dans la section *****, le tenseur de Ricci s'interprète comme une sorte de laplacien de la métrique en coordonnées harmoniques. En utilisant des techniques de régularité elliptique, on obtient alors le théorème suivant [DK81] :

Théorème 1.1.23. *Les variété Einstein sont analytiques dans les cartes harmoniques. (Voir formulation précise)*

Nous allons maintenant nous intéresser aux conséquences des équations d'Einstein sur la seconde forme fondamentale d'une hypersurface. Reprenant les notations de la partie ??, on a :

Proposition 1.1.24 (Equations des hypersurfaces : le cas Einstein).

– Evolution de la courbure moyenne :

$$\partial_r H + \frac{H^2}{n-1} + \left| \overset{\circ}{S} \right|_g^2 = -(n-1)\lambda, \quad (1.1.31)$$

– Composantes normales du tenseur de Riemann :

$$\mathcal{R}_{0i0j} = (n-1)\lambda g_{ij} - \text{Ric}^{\Sigma}_{ij} + HS_{ij} - S_{ik}S^k_j \quad (1.1.32)$$

– Evolution de l'opérateur de forme :

$$\partial_r S^i_j = -(n-1)\lambda \delta^i_j - HS^i_j + \text{Ric}^{\Sigma i}_j, \quad (1.1.33)$$

– Contrainte Hamiltonienne :

$$\text{Scal}^{\Sigma} + S^{ij}S_{ij} - H^2 = (n-2)(n-1)\lambda, \quad (1.1.34)$$

– Contrainte moment :

$$\nabla_i^{\Sigma} S^i_j - \nabla_j^{\Sigma} H = 0. \quad (1.1.35)$$

Démonstration. L'équation (1.1.31) est obtenue en prenant la trace de l'équation (0.2.2). L'équation (1.1.33) est obtenue en remplaçant dans l'équation de Riccati (0.2.2), \mathcal{R}^i_{0j0} par son expression (0.2.5). En prenant la trace sur i et k de l'équation de Codazzi–Mainardi (0.2.4), on obtient la contrainte moment (1.1.35). Finalement on a, en prenant la trace de l'équation d'évolution de l'opérateur de forme (1.1.33) et l'équation d'évolution de la courbure moyenne (1.1.31) :

$$\begin{cases} \partial_r H = -(n-1)^2 \lambda - H^2 + \text{Scal}^{\Sigma} \\ \partial_r H = -(n-1) - \left| \overset{\circ}{S} \right|_g^2 \lambda. \end{cases}$$

La contrainte Hamiltonienne est obtenue en prenant la différence de ces deux équations.

□

Ces équations permettent d'obtenir des équations aux dérivées partielles elliptiques pour la seconde forme fondamentale :

Proposition 1.1.25 (laplacien tangentiel de la seconde forme fondamentale).

$$\begin{aligned} \Delta^\Sigma S_{kl} - \nabla_{k,l}^\Sigma H + 2\mathcal{R}^{\Sigma i j}_{k l} S_{ij} &= \mathcal{R}ic^\Sigma{}^p{}_k S_{pl} + H\mathcal{R}_{k0l0} - S^i{}_k \mathcal{R}_{i0l0} - S_{ki} S^i{}_j S^j{}_l + S^{ij} S_{ij} S_{kl} + g^{ij} \nabla_i \mathcal{W}_{jkl0} \\ &= \mathcal{R}ic^\Sigma{}^p{}_k S_{pl} + S^p{}_k \mathcal{R}ic^\Sigma{}_{pl} - H\mathcal{R}ic^\Sigma{}_{kl} + S^{ij} S_{ij} S_{kl} + g^{ij} \nabla_i \mathcal{W}_{jkl0} \\ &\quad + H((n-1)\lambda g_{kl} + HS_{kl} - 2S_{ki} S^i{}_l) - (n-1)\lambda S_{kl}. \end{aligned} \tag{1.1.36}$$

Démonstration. Prenons la dérivée covariante de l'équation de Codazzi-Mainardi (0.2.4) :

$$\nabla_i^\Sigma \mathcal{R}_{jkl0} = \nabla_i^\Sigma (\nabla_j^\Sigma S_{kl} - \nabla_k^\Sigma S_{jl}),$$

puis contractons les deux premiers indices :

$$g^{ij} \nabla_i^\Sigma \mathcal{R}_{jkl0} = \Delta^\Sigma S_{kl} - g^{ij} \nabla_i^\Sigma \nabla_k^\Sigma S_{jl}.$$

Commutons ensuite les deux dérivées qui apparaissent dans le second terme :

$$\begin{aligned} g^{ij} \nabla_i^\Sigma \mathcal{R}_{jkl0} &= \Delta^\Sigma S_{kl} - \nabla_k^\Sigma (g^{ij} \nabla_i^\Sigma S_{jl}) + g^{ij} (\mathcal{R}^{\Sigma p}{}_{jik} S_{pl} + \mathcal{R}^{\Sigma p}{}_{lik} S_{jp}) \\ &= \Delta^\Sigma S_{kl} - \nabla_{k,l}^\Sigma H - \mathcal{R}ic^\Sigma{}^p{}_k S_{pl} + \mathcal{R}^{\Sigma i j}_{k l} S_{ij}. \end{aligned}$$

Exprimons le membre de gauche en utilisant la connexion de Levi-Civita de (M, g) :

$$\begin{aligned} g^{ij} \nabla_i^\Sigma \mathcal{R}_{jkl0} &= g^{ij} (\partial_i \mathcal{R}_{jkl0} - \Gamma_{ij}^p \mathcal{R}_{pkl0} - \Gamma_{ik}^p \mathcal{R}_{jpl0} - \Gamma_{il}^p \mathcal{R}_{jpk0}) \\ &= g^{ij} (\nabla_i \mathcal{R}_{jkl0} + \Gamma_{ij}^0 \mathcal{R}_{0kl0} + \Gamma_{ik}^0 \mathcal{R}_{j0l0} + \Gamma_{il}^0 \mathcal{R}_{jk00} + \Gamma_{i0}^\mu \mathcal{R}_{jkl\mu}) \\ &= g^{ij} (\nabla_i \mathcal{R}_{jkl0} - S_{ij} \mathcal{R}_{0kl0} - S_{ik} \mathcal{R}_{j0l0} + S^p{}_i \mathcal{R}_{jklp}) \\ &= g^{ij} \nabla_i \mathcal{R}_{jkl0} + H\mathcal{R}_{k0l0} - S^i{}_k \mathcal{R}_{i0l0} - \mathcal{R}^i{}_k{}^j{}_l S_{ij} \\ &= g^{ij} \nabla_i \mathcal{R}_{jkl0} + H\mathcal{R}_{k0l0} - S^i{}_k \mathcal{R}_{i0l0} - (\mathcal{R}^{\Sigma i j}_{k l} - S^{ij} S_{kl} + S^i{}_l S^j{}_k) S_{ij} \\ &= g^{ij} \nabla_i \mathcal{R}_{jkl0} + H\mathcal{R}_{k0l0} - S^i{}_k \mathcal{R}_{i0l0} - \mathcal{R}^{\Sigma i j}_{k l} S_{ij} - S_{ki} S^i{}_j S^j{}_l + S^{ij} S_{ij} S_{kl}. \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \Delta^\Sigma S_{kl} - \nabla_{k,l}^\Sigma H + 2\mathcal{R}^{\Sigma i j}_{k l} S_{ij} &= \mathcal{R}ic^\Sigma{}^p{}_k S_{pl} + H\mathcal{R}_{k0l0} - S^i{}_k \mathcal{R}_{i0l0} - S_{ki} S^i{}_j S^j{}_l + S^{ij} S_{ij} S_{kl} + g^{ij} \nabla_i \mathcal{W}_{jkl0} \\ &= \mathcal{R}ic^\Sigma{}^p{}_k S_{pl} - S_{ki} S^i{}_j S^j{}_l + S^{ij} S_{ij} S_{kl} + g^{ij} \nabla_i \mathcal{W}_{jkl0} \\ &\quad + H((n-1)\lambda g_{kl} - \mathcal{R}ic^\Sigma{}_{kl} + HS_{kl} - S_{ki} S^i{}_l) \\ &\quad - S^i{}_k ((n-1)\lambda g_{il} - \mathcal{R}ic^\Sigma{}_{il} + HS_{il} - S_{ij} S^j{}_l) \\ &= \mathcal{R}ic^\Sigma{}^p{}_k S_{pl} + S^p{}_k \mathcal{R}ic^\Sigma{}_{pl} - H\mathcal{R}ic^\Sigma{}_{kl} + S^{ij} S_{ij} S_{kl} + g^{ij} \nabla_i \mathcal{W}_{jkl0} \\ &\quad + H((n-1)\lambda g_{kl} + HS_{kl} - 2S_{ki} S^i{}_l) - (n-1)\lambda S_{kl}. \end{aligned}$$

□

Proposition 1.1.26 (Equation de Biquard).

$$\partial_r^2 S^i{}_j + \partial_r H S^i{}_j + H \partial_r S^i{}_j = g^{ik} (\nabla_{k,j}^\Sigma H - \Delta^\Sigma S_{jk} - 2\mathcal{R}^{\Sigma p q}_{j k} S_{pq}) + \mathcal{R}ic^\Sigma{}^i{}_k S^k{}_j - S^i{}_k \mathcal{R}ic^\Sigma{}^k{}_j. \tag{1.1.37}$$

Démonstration. Dérivons par rapport à r l'équation (1.1.33) :

$$\partial_r^2 S^i{}_j = -\partial_r H S^i{}_j - H \partial_r S^i{}_j + \partial_r \mathcal{R}ic^\Sigma{}^i{}_j.$$

Comme $\mathcal{R}ic^i{}_j = g^{ik} \mathcal{R}ic_{kj}$ et $\partial_r g_{ij} = 2S_{ij}$ (formule (0.2.6)), on a :

$$\begin{aligned} \partial_r^2 S^i{}_j + \partial_r H S^i{}_j + H \partial_r S^i{}_j &= -2g^{ip} g^{kq} S_{pq} \mathcal{R}ic^\Sigma{}_{kj} + g^{ik} \partial_r \mathcal{R}ic^\Sigma{}_{kj} \\ &= -2S^i{}_k \mathcal{R}ic^\Sigma{}^k{}_j + g^{ik} \partial_r \mathcal{R}ic^\Sigma{}_{kj}. \end{aligned}$$

En appliquant la formule de variation au premier ordre du tenseur de Ricci (1.1.21) à la métrique tangentielle, on obtient :

$$\begin{aligned}
\partial_r \mathcal{R}ic^\Sigma_{kj} &= g^{pq} \left(\nabla_q^\Sigma \nabla_k^\Sigma S_{pj} + \nabla_q^\Sigma \nabla_j^\Sigma S_{kp} - \nabla_q^\Sigma \nabla_p^\Sigma S_{kj} - \nabla_j^\Sigma \nabla_k^\Sigma S_{pq} \right) \\
&= g^{pq} \left(\nabla_k^\Sigma \nabla_q^\Sigma S_{pj} + \nabla_j^\Sigma \nabla_q^\Sigma S_{kp} - \nabla_q^\Sigma \nabla_p^\Sigma S_{kj} - \nabla_j^\Sigma \nabla_k^\Sigma S_{pq} - \mathcal{R}^{\Sigma l}_{pqk} S_{lj} - \mathcal{R}^{\Sigma l}_{jqk} S_{pl} - \mathcal{R}^{\Sigma l}_{kqj} S_{lp} - \mathcal{R}^{\Sigma l}_{pjk} S_{ql} \right) \\
&= \nabla_{k,j}^\Sigma H - \Delta^\Sigma S_{jk} + S_{jl} \mathcal{R}ic^\Sigma{}^l{}_k + \mathcal{R}ic^\Sigma{}^l{}_j S_{lk} - 2\mathcal{R}^{\Sigma p q}{}_j{}_k S_{pq},
\end{aligned}$$

où pour passer de la deuxième ligne à la troisième, on a utilisé la contrainte moment (1.1.35). Finalement,

$$\partial_r^2 S^i{}_j + \partial_r H S^i{}_j + H \partial_r S^i{}_j = g^{ik} \left(\nabla_{k,j}^\Sigma H - \Delta^\Sigma S_{jk} - 2\mathcal{R}^{\Sigma p q}{}_j{}_k S_{pq} \right) + \mathcal{R}ic^\Sigma{}^i{}_k S^k{}_j - S^i{}_k \mathcal{R}ic^\Sigma{}^k{}_j.$$

□

1.2 Variétés asymptotiquement hyperboliques

Chapitre 2

Compactification des variétés asymptotiquement localement hyperboliques

Ce chapitre, en anglais, correspond à l'article *Conformal compactification of asymptotically locally hyperbolic metrics* ([BG08], soumis) coécrit avec Eric Bahuaud. Dans cet article, nous étudions dans quelle mesure les variétés asymptotiquement hyperboliques peuvent être caractérisées intrinsèquement. Prolongeant un travail antérieur d'E. Bahuaud [Bah08], nous montrons comment le comportement asymptotique de la courbure et de ses dérivées covariantes influence la régularité de la métrique compactifiée. Dans le cas Einstein, nous montrons que le comportement asymptotique de la courbure contrôle celui de ses dérivées covariantes. Remarquons que, comme tout bon Anglais, ce chapitre (à l'exception de l'appendice) roule à gauche : les conventions pour la courbure sont opposées à celles adoptées dans cette thèse. Dans l'appendice (non publié, section 2.1) nous énonçons une conjecture sur le comportement à l'infini de la courbure sectionnelle des variétés asymptotiquement localement hyperboliques d'Einstein. Cette conjecture a motivé les résultats qui apparaissent dans l'article. Nous avons également démontré d'autres résultats partiels en vue de prouver la conjecture. Nous les avons collectés, avec quelques pistes de preuve de la conjecture et quelques remarques sur la définition d'une partie essentielle (donnée en page ??), dans l'appendice de ce chapitre (section 2.1).

Sommaire

2.1	Appendice	18
-----	---------------------	----

2.1 Appendice

Dans tout cet appendice, nous supposons que la variété M est de dimension $n + 1$.

Chapitre 3

Prescription de la courbure scalaire sur une variété asymptotiquement hyperbolique

Chapitre 4

Equations de contrainte en relativité générale

Dans ce chapitre, nous étudions quelques problèmes liés aux équations de contrainte en relativité générale. Les sections 4.2.2 et 4.2.3 sont tiées de l'article *De l'équation de prescription de courbure scalaire aux équations de contrainte en relativité générale sur une variété asymptotiquement hyperbolique* ([Gic08], soumis). La section 4.3 est la version française de l'article *Linearization stability of the Einstein constraint equations on an asymptotically hyperbolic manifold* ([Gic], en préparation).

Sommaire

4.1	Introduction	21
4.2	La méthode conforme de Choquet-Bruhat–Lichnerowicz–York	21
4.2.1	Présentation	22
4.2.2	Etude du laplacien vectoriel et construction de TT-tenseurs	22
4.2.3	Solutions CMC avec des horizons apparents	22
4.3	Stabilité par linéarisation des équations d'Einstein	22

4.1 Introduction

4.2 La méthode conforme de Choquet-Bruhat–Lichnerowicz–York

Dans toute cette section, nous ne considèrerons que les équations de contrainte du vide :

$$\rho = 0, J_i = 0.$$

La méthode conforme a été la première méthode de construction de solutions des équations de contrainte et reste, à l'heure actuelle, l'une des plus employées. Dans le cas où la courbure moyenne $\text{tr}_g K$ est constante, cette méthode ramène la construction de solutions à l'étude de deux équations aux dérivées partielles elliptiques, liant une fonction $\varphi > 0$ et une 1-forme ψ , essentiellement non couplées (l'une deux deux équations ne dépendant que de ψ). Elle a été en particulier utilisée pour construire des solutions des équations de contrainte à courbure moyenne constante sur des variétés compactes [CBY80] [Ise95], asymptotiquement euclidiennes [Can79] [CB81] et asymptotiquement hyperboliques [AC96]. Elle a également été utilisée dans [Dai04, Dai05], [Max05] et [Gic08] (que nous reproduisons ici) pour construire des solutions contenant des horizons apparents (pour la définition voir section ??). La construction de solutions à courbure moyenne non constante est plus difficile. Cette question est cependant importante car il existe des espaces-temps ne contenant aucune surface de Cauchy à courbure moyenne constante (voir en particulier [Bar88]). De nombreux travaux ont été réalisés dans le cas d'une courbure moyenne quasi-constante pour une surface de Cauchy compacte [CBIM92] [IM96] [ACI08] [HNT08], asymptotiquement euclidienne [CBIY00] et asymptotiquement hyperbolique [IP97]. Récemment, une méthode de point fixe a été mise au point dans [HNT08, HNT07] et [Max08] pour

résoudre les équations de la méthode conforme dans le cas d'une courbure moyenne prescrite (non constante).

4.2.1 Présentation

4.2.2 Etude du laplacien vectoriel et construction de TT-tenseurs

4.2.3 Solutions CMC avec des horizons apparents

4.3 Stabilité par linéarisation des équations d'Einstein

Chapitre 5

Projets à l'issue de la thèse

Bibliographie

- [AC96] Lars Andersson and Piotr T. Chruściel, *Solutions of the constraint equations in general relativity satisfying “hyperboloidal boundary conditions”*, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) **355** (1996), 100. MR MR1405962 (97e :58217)
- [ACI08] Paul T. Allen, Adam Clausen, and James Isenberg, *Near-constant mean curvature solutions of the Einstein constraint equations with non-negative Yamabe metrics*, Classical Quantum Gravity **25** (2008), no. 7, 075009, 15. MR MR2404418 (2009a :83009)
- [AM79] Judith M. Arms and Jerrold E. Marsden, *The absence of Killing fields is necessary for linearization stability of Einstein’s equations*, Indiana Univ. Math. J. **28** (1979), no. 1, 119–125. MR MR523627 (80j :58020)
- [And83] Michael T. Anderson, *The Dirichlet problem at infinity for manifolds of negative curvature*, J. Differential Geom. **18** (1983), no. 4, 701–721 (1984). MR MR730923 (85m :58178)
- [And03] ———, *Boundary regularity, uniqueness and non-uniqueness for AH Einstein metrics on 4-manifolds*, Adv. Math. **179** (2003), no. 2, 205–249. MR MR2010802 (2004m :53078)
- [AS85] Michael T. Anderson and Richard Schoen, *Positive harmonic functions on complete manifolds of negative curvature*, Ann. of Math. (2) **121** (1985), no. 3, 429–461. MR MR794369 (87a :58151)
- [Bah08] Eric Bahuaud, *Intrinsic characterization for Lipschitz asymptotically hyperbolic metrics*, Submitted. (2008).
- [Bar88] Robert Bartnik, *Remarks on cosmological spacetimes and constant mean curvature surfaces*, Comm. Math. Phys. **117** (1988), no. 4, 615–624. MR MR953823 (89g :53094)
- [Bes87] Arthur L. Besse, *Einstein manifolds*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], vol. 10, Springer-Verlag, Berlin, 1987. MR MR867684 (88f :53087)
- [BG08] Eric Bahuaud and Romain Gicquaud, *Conformal compactification of asymptotically locally hyperbolic metrics*, Preprint available at <http://arxiv.org/abs/0811.4184> (2008), 27 pages.
- [Biq05] Olivier Biquard (ed.), *AdS/CFT correspondence : Einstein metrics and their conformal boundaries*, IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics, vol. 8, European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2005, Papers from the 73rd Meeting of Theoretical Physicists and Mathematicians held in Strasbourg, September 11–13, 2003. MR MR2160864 (2006b :53001)
- [BM06] Eric Bahuaud and Tracey Marsh, *Hölder compactification for some manifolds with pinched negative curvature at infinity*, accepted, Canadian Journal of Mathematics. Preprint available at <http://www.arxiv.org/abs/math.DG/0601503> (2006).
- [Can79] Murray Cantor, *A necessary and sufficient condition for York data to specify an asymptotically flat spacetime*, J. Math. Phys. **20** (1979), no. 8, 1741–1744. MR MR543911 (80k :83018)
- [CB81] Murray Cantor and Dieter Brill, *The Laplacian on asymptotically flat manifolds and the specification of scalar curvature*, Compositio Math. **43** (1981), no. 3, 317–330. MR MR632432 (83a :58021)
- [CBD73] Y. Choquet-Bruhat and S. Deser, *On the stability of flat space*, Ann. Physics **81** (1973), 165–178. MR MR0341358 (49 #6109)

- [CBFM77] Yvonne Choquet-Bruhat, Arthur Fisher, and Jerrold Marsden, *Équations des contraintes sur une variété non compacte*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **284** (1977), no. 16, A975–A978. MR MR0433498 (55 #6474)
- [CBG69] Yvonne Choquet-Bruhat and Robert Geroch, *Global aspects of the Cauchy problem in general relativity*, Comm. Math. Phys. **14** (1969), 329–335. MR MR0250640 (40 #3872)
- [CBIM92] Yvonne Choquet-Bruhat, James Isenberg, and Vincent Moncrief, *Solutions of constraints for Einstein equations*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **315** (1992), no. 3, 349–355. MR MR1179734 (93h :58151)
- [CBIY00] Yvonne Choquet-Bruhat, James Isenberg, and James W. York, Jr., *Einstein constraints on asymptotically Euclidean manifolds*, Phys. Rev. D (3) **61** (2000), no. 8, 084034, 20. MR MR1791413 (2001f :83012)
- [CBY80] Yvonne Choquet-Bruhat and James W. York, Jr., *The Cauchy problem*, General relativity and gravitation, Vol. 1, Plenum, New York, 1980, pp. 99–172. MR MR583716 (82k :58028)
- [CDLS05] Piotr T. Chruściel, Erwann Delay, John M. Lee, and Dale N. Skinner, *Boundary regularity of conformally compact Einstein metrics*, J. Differential Geom. **69** (2005), no. 1, 111–136. MR MR2169584 (2007g :53042)
- [CH03] Piotr T. Chruściel and Marc Herzlich, *The mass of asymptotically hyperbolic Riemannian manifolds*, Pacific J. Math. **212** (2003), no. 2, 231–264. MR MR2038048 (2005d :53052)
- [Dai04] Sergio Dain, *Trapped surfaces as boundaries for the constraint equations*, Classical Quantum Gravity **21** (2004), no. 2, 555–573. MR MR2030884 (2004m :83060)
- [Dai05] *Corrigendum : “Trapped surfaces as boundaries for the constraint equations” [Classical Quantum Gravity **21** (2004), no. 2, 555–573; mr2030884] by S. Dain*, Classical Quantum Gravity **22** (2005), no. 4, 769. MR MR2118199 (2005j :83076)
- [Del97] Erwann Delay, *Analyse précisée d’équations semi-linéaires elliptiques sur l’espace hyperbolique et application à la courbure scalaire conforme*, Bull. Soc. Math. France **125** (1997), no. 3, 345–381. MR MR1605461 (99j :53045)
- [DK81] Dennis M. DeTurck and Jerry L. Kazdan, *Some regularity theorems in Riemannian geometry*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **14** (1981), no. 3, 249–260. MR MR644518 (83f :53018)
- [EO73] P. Eberlein and B. O’Neill, *Visibility manifolds*, Pacific J. Math. **46** (1973), 45–109. MR MR0336648 (49 #1421)
- [FB52] Yvonne Fourès-Bruhat, *Théorème d’existence pour certains systèmes d’équations aux dérivées partielles non linéaires*, Acta Math. **88** (1952), 141–225. MR MR0053338 (14,756g)
- [FG85] Charles Fefferman and C. Robin Graham, *Conformal invariants*, Astérisque (1985), no. Numero Hors Serie, 95–116, The mathematical heritage of Élie Cartan (Lyon, 1984). MR MR837196 (87g :53060)
- [FM73] Arthur E. Fischer and Jerrold E. Marsden, *Linearization stability of the Einstein equations*, Bull. Amer. Math. Soc. **79** (1973), 997–1003. MR MR0426035 (54 #13981)
- [Gic] Romain Gicquaud, *Linearization stability of the Einstein constraint equations on an asymptotically hyperbolic manifold*, En préparation.
- [Gic08] ———, *De l’équation de prescription de courbure scalaire aux équations de contrainte en relativité générale sur une variété asymptotiquement hyperbolique*, Soumis. Prépublication disponible sur <http://arxiv.org/abs/0802.3279> (2008), 41 pages.
- [GL91] C. Robin Graham and John M. Lee, *Einstein metrics with prescribed conformal infinity on the ball*, Adv. Math. **87** (1991), no. 2, 186–225. MR MR1112625 (92i :53041)
- [HE] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The Large scale structure of space-time*, Cambridge University Press, Cambridge, 1973.
- [HNT07] Michael J. Holst, Gabriel Nagy, and Gantumur Tsogtgerel, *Rough solutions of the Einstein Constraints on Closed Manifolds without near-CMC conditions*, Preprint available at <http://arxiv.org/abs/0712.0798> (2007), 65 pages.
- [HNT08] ———, *Far-from-constant mean curvature solutions of Einstein’s constraint equations with positive Yamabe metrics*, Phys. Rev. Lett. **100** (2008), no. 16, 161101, 4. MR MR2403263

- [IM96] James Isenberg and Vincent Moncrief, *A set of nonconstant mean curvature solutions of the Einstein constraint equations on closed manifolds*, Classical Quantum Gravity **13** (1996), no. 7, 1819–1847. MR MR1400943 (97h :83010)
- [IP97] James Isenberg and Jiseong Park, *Asymptotically hyperbolic non-constant mean curvature solutions of the Einstein constraint equations*, Classical Quantum Gravity **14** (1997), no. 1A, A189–A201, Geometry and physics. MR MR1692217 (2000e :83009)
- [Ise95] James Isenberg, *Constant mean curvature solutions of the Einstein constraint equations on closed manifolds*, Classical Quantum Gravity **12** (1995), no. 9, 2249–2274. MR MR1353772 (97a :83013)
- [Lee06] John M. Lee, *Fredholm operators and Einstein metrics on conformally compact manifolds*, Mem. Amer. Math. Soc. **183** (2006), no. 864, vi+83. MR MR2252687 (2007m :53047)
- [Mal98] Juan Maldacena, *The large N limit of superconformal field theories and supergravity*, Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998), no. 2, 231–252. MR MR1633016 (99e :81204a)
- [Max05] David Maxwell, *Solutions of the Einstein constraint equations with apparent horizon boundaries*, Comm. Math. Phys. **253** (2005), no. 3, 561–583. MR MR2116728 (2006c :83008)
- [Max08] ———, *A class of solutions of the vacuum einstein constraint equations with freely specified mean curvature*, Preprint available at <http://arxiv.org/abs/0804.0874> (2008), 21 pages.
- [Maz91] Rafe Mazzeo, *Elliptic theory of differential edge operators. I*, Comm. Partial Differential Equations **16** (1991), no. 10, 1615–1664. MR MR1133743 (93d :58152)
- [MO89] Maung Min-Oo, *Scalar curvature rigidity of asymptotically hyperbolic spin manifolds*, Math. Ann. **285** (1989), no. 4, 527–539. MR MR1027758 (91b :53047)
- [Mon75] Vincent Moncrief, *Spacetime symmetries and linearization stability of the Einstein equations. I*, J. Mathematical Phys. **16** (1975), 493–498. MR MR0363398 (50 #15836)
- [Mon76] ———, *Space-time symmetries and linearization stability of the Einstein equations. II*, J. Mathematical Phys. **17** (1976), no. 10, 1893–1902. MR MR0416469 (54 #4541)
- [Rat06] John G. Ratcliffe, *Foundations of hyperbolic manifolds*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 149, Springer, New York, 2006. MR MR2249478 (2007d :57029)
- [ST05] Yuguang Shi and Gang Tian, *Rigidity of asymptotically hyperbolic manifolds*, Comm. Math. Phys. **259** (2005), no. 3, 545–559. MR MR2174416 (2006g :53053)
- [Wal] Robert M. Wald, *General Relativity*, Chicago, Usa : Univ. Pr. (1984) 491p.
- [Wan01] Xiaodong Wang, *The mass of asymptotically hyperbolic manifolds*, J. Differential Geom. **57** (2001), no. 2, 273–299. MR MR1879228 (2003c :53044)

Étude de quelques problèmes d'analyse et de géométrie sur les variétés asymptotiquement hyperboliques

Résumé : Cette thèse est divisée en deux parties.

Dans une première partie, nous étudions la compactification des variétés asymptotiquement localement hyperboliques, c'est-à-dire des variétés riemanniennes non-compactes dont la courbure sectionnelle tend vers -1 à l'infini. Nous montrons comment le comportement asymptotique de la courbure et de ses dérivées covariantes influence la régularité de la métrique compactifiée. Dans le cas Einstein, nous montrons que le comportement asymptotique de la courbure contrôle celui de ses dérivées covariantes, nous énonçons une conjecture sur le comportement à l'infini de la courbure sectionnelle et nous donnons quelques pistes de démonstration.

La seconde partie traite des équations de contrainte en relativité générale sur les variétés asymptotiquement hyperboliques. Tout d'abord, nous construisons des solutions de ces équations contenant des horizons apparents à l'aide de la méthode conforme, puis nous étudions le problème de leur stabilité par linéarisation. Nous démontrons en particulier que les données initiales correspondant aux espaces-temps vides sont stables par linéarisation dans un certain intervalle de poids. Pour des poids plus grands, nous montrons que ces équations deviennent instables.

Mots-Clés : Géométrie riemannienne, Variété conformément compacte, Variétés asymptotiquement hyperboliques et asymptotiquement localement hyperboliques, Equations aux dérivées partielles elliptiques, Courbure scalaire conforme, Equations de contrainte, Equation de Lichnerowicz, TT-tenseurs, Horizons apparents, Stabilité par linéarisation.

Study of some geometric and analytic problems on an asymptotically hyperbolic manifold

Summary : This thesis is divided in two parts.

In the first part, we study the compactification of asymptotically locally hyperbolic manifolds, that is to say non-compact Riemannian manifolds whose sectional curvature tends to -1 at infinity. We show how the asymptotic behavior of the curvature and of its covariant derivatives influences the regularity of the compactified metric. In the Einstein case, we prove that the estimate on the sectional curvature implies the control of all covariant derivatives of the Riemann tensor, we give a conjecture on the behavior at infinity of the sectional curvature and give some demo tracks.

The second part deals with the constraint equations in general relativity on an asymptotically hyperbolic manifold. First, we give a construction of solutions to these equations containing apparent horizons using the conformal method. Then we study the problem of their linearization-stability. We show in particular that initial data corresponding to empty space-times are linearization-stable in a certain range of weight. For larger weights, we show that these equations become unstable.

Keywords : Riemannian geometry, Conformally compact metric, Asymptotically hyperbolic and asymptotically locally hyperbolic metric, Elliptic partial differential equations, Conformal scalar curvature, Constraint equations, Lichnerowicz equation, TT-tensors, Apparent horizons, Linearization stability.

Discipline : Mathématiques

Laboratoire :

Institut de Mathématiques et de Modélisation de Montpellier - CNRS UMR 5149
Université Montpellier II
Case Courrier 051
Place Eugène Bataillon
34095 Montpellier Cedex 5.