

Mémoire présenté en vue d'obtenir

**HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES
UNIVERSITÉ PARIS 6**

Spécialité :

Mathématiques

présentée par

Stéphane Cordier

Sujet :

**Analyse mathématique et numérique de
modèles hydrodynamiques et cinétiques
issus de la physique des plasmas**

Table des matières

Introduction.	5
Résumé du travail de thèse.	7
I Modèles hydrodynamiques : systèmes Euler-Poisson	11
1 Modèles hydrodynamiques pour les plasmas.	13
1.1 Dérivation.	13
1.2 Adimensionnement.	15
1.3 Asymptotiques formelles.	16
2 Existence de solutions faibles par méthode de Glimm [a4]	17
3 Limite quasi-neutre	19
3.1 Euler-Poisson non linéaire [a7]	19
3.2 Deux systèmes d'Euler couplé par Poisson [s1]	21
4 Ionisation multi-espèces [s3].	22
5 Instabilité des deux jets [s4]	24
6 Travaux en cours et perspectives.	25
6.1 Euler sans pression-Poisson [e1]	25
6.2 Limite masse électronique petite $m_e \rightarrow 0$ [e3]	26
II Modèles cinétiques : opérateurs de collisions	27
1 Régularisation de l'équation de Boltzmann [a3]	31
2 Fokker-Planck-Landau.	34
2.1 Algorithmes rapides [a2].	36
2.2 Existence de solutions et propriétés des schémas [a6]	38
3 Fokker-Planck-Landau isotrope.	40

3.1	Existence de solutions pour FPL log [a5]	41
3.2	Forme sans log et schémas en temps [s2]	42
3.3	Méthode de Levermore [s5]	44
4	Analyse spectrale de l'opérateur de Lorentz [a8]	44
5	Travaux en cours et perspectives.	46
5.1	Couplage avec Vlasov.	46
5.2	Equation de Boltzmann quantique.	46
	Autres travaux.	49
	Bibliographie.	50

Introduction.

Le sujet général de mes recherches est la modélisation mathématique et les simulations numériques en physique des plasmas. Je m'intéresse en particulier aux systèmes d'Euler-Poisson et aux opérateurs de collisions de Boltzmann, de Fokker-Planck-Landau, de Lorentz.

Systèmes Euler-Poisson.

Dans cette partie, j'expose les résultats obtenus sur les systèmes des équations d'Euler (conservation de la masse, l'impulsion, l'énergie) couplés par l'équation de Poisson après avoir en avoir rappelé la dérivation. Il s'agit notamment de l'extension du résultat d'**existence globale de solutions faibles** entropiques au cas des équations d'Euler couplées avec l'équation de Poisson non linéaire [a4]. Ensuite, je présente la justification de la **limite quasi-neutre** pour des solutions suffisamment régulières et des temps petits, obtenues par des techniques pseudo-différentielles en collaboration avec E. Grenier [a7, s1]. Puis, je donne les résultats obtenus en collaboration avec P.A. Raviart et C. Buet sur le problème de l'**ionisation multi-espèce** [s3] qui conduit à l'étude d'un système différentiel singulier à l'origine. Enfin, je présente un résultat sur l'**instabilité des deux jets** obtenu avec E. Grenier et Y. Guo où l'on montre comment étendre cette instabilité linéaire au cas non linéaire [s4].

Opérateurs de collisions.

Dans ce domaine, j'ai travaillé avec C. Buet sur les méthodes à répartition discrète de vitesses, D.V.M., pour l'équation de Boltzmann (généralisation au cas multi-espèce). Ensuite, nous avons tenté de développer une méthode **particulaire** pour résoudre l'équation de **Boltzmann** satisfaisant la propriété de décroissance de l'entropie et les lois de conservation [a3].

J'ai également travaillé sur l'équation de **Fokker-Planck-Landau** (homogène) pour laquelle une discrétisation entropique venait d'être proposée par B. Lucquin et P. Degond [164, 136]. Nous avons d'abord travaillé à **réduire le coût quadratique** de l'évaluation de cet opérateur par des méthodes de type sous-réseaux et multigrille qui ont fait l'objet d'une publication dans JCP en collaboration avec C. Buet, P. Degond et M. Lemou [a2]. Puis, nous avons justifié l'existence de solutions pour les problèmes semi-discrétisés (i.e. uniquement dans l'espace des vitesses) et discrets (i.e. en temps et en espace) [a6]. Nous avons étudié en détail le cas des **fonctions isotropes** [a5, s2] pour lequel les résultats et les méthodes numériques peuvent être améliorés. Je présente aussi un travail sur une adaptation de la méthode de **fermeture des moments** de D. Levermore pour l'opérateur FPL isotrope.

Enfin, je présente les résultats obtenus récemment avec C. Buet et B. Lucquin-Desreux pour le modèle de **Lorentz** [a8] et notamment la limite "**collisions rasantes**". Il s'agit d'une analyse **spectrale** des opérateurs qui permet de montrer que la convergence des solutions dans cette asymptotique est uniforme en temps et qu'on contrôle les vitesses de retour vers l'équilibre.

Plan de ce mémoire.

Avant de détailler les deux parties principales que je viens d'évoquer, je rappelle brièvement les principaux résultats de ma thèse. Les conclusions de ces travaux conduisent assez naturellement à l'étude des modèles hydrodynamiques et des modèles cinétiques de plasmas.

La première partie est donc consacrée aux modèles hydrodynamiques qui y sont présentés avant de résumer les résultats obtenus. Il s'agit de **justifier mathématiquement certaines propriétés** de ces modèles (existence globale de solutions faibles, limite quasi-neutre, instabilité des deux jets, solution maximale pour l'ionisation). Dans la dernière section de cette partie, je donne quelques perspectives et problèmes ouverts.

Dans la seconde partie, je résume les travaux effectués pour la **résolution numérique des opérateurs de collisions**. Le fil conducteur de cette partie est la dérivation de schémas numériques préservant les propriétés des opérateurs à savoir conservation des invariants physiques (masse, impulsion, énergie), des états d'équilibre et décroissance de l'entropie. Ces propriétés, si elles sont facilement vérifiées formellement pour les opérateurs continus, posent parfois des difficultés au niveau discret. De plus, ces propriétés sont nécessaires pour assurer le retour des solutions approchées vers l'état d'équilibre thermodynamique local, ETL et donc d'avoir, en temps grand, le comportement hydrodynamique souhaité. Je présente enfin mes axes de recherches actuelles.

Je présente enfin quelques travaux n'entrant pas dans ma thématique principale, puis ma liste de publications, la liste des codes numériques sur lesquels j'ai travaillé et la bibliographie.

Convention de notations: mes publications sont repérées par des lettres. [t1-t6] désigne les articles tirés de ma thèse, [a1-a7] les articles parus ou acceptés postérieurs à la thèse et [s1-s6] les articles soumis. Je mentionne aussi les notes aux comptes rendus [n1-n4], les actes de congrès [p1-p2], les travaux en cours [e1-e7], divers travaux [d1-d5] et les rapports de stages que j'ai encadrés [r1-r3]. Les autres publications sont repérées par des nombres et regroupés par thèmes.

J'ai évité au maximum les abréviations. J'utilise néanmoins **FPL** pour l'équation de Fokker-Planck-Landau, **ETL** pour l'équilibre thermodynamique local, i.e. la Maxwellienne ayant les mêmes cinq premiers moments que la fonction de distribution, et **DMV** pour les méthodes à répartition discrète de vitesse, lorsque la fonction de distribution est définie sur une grille de l'espace des vitesses.

Résumé du travail de thèse.

Dans ma thèse, soutenue en mars 1994, je me suis intéressé à des modèles issus de la physique des plasmas spatiaux. Je l'ai effectuée au C.M.L.A. de l'E.N.S. de Cachan et au C.M.A.P. de l'école Polytechnique, sous la direction de P. Degond. L'objectif de cette collaboration avec des physiciens du C.E.T.P. Saint Maur dirigé par J.J. Berthelier et dans le cadre du GdR SPARCH dirigé par P.A. Raviart, est d'étudier des modèles de transport du plasma ionosphérique le long des lignes de champ magnétique afin de comprendre, par exemple, les mécanismes physiques qui sont responsables de l'extraction des ions de l'atmosphère neutre vers les hautes altitudes (environ 10000 Km). Il s'agit notamment de proposer des méthodes numériques stables, précises et rapides pour résoudre un système hyperbolique décrivant l'évolution des variables macroscopiques (densité, vitesse, température, flux de chaleur) des différentes espèces et prenant en compte les effets de l'ionisation, des collisions, de la gravité, de dépôt de chaleur, de la chimie.

Ces phénomènes (extraction des ions ionosphériques) ont lieu dans une zone de transition : entre les basses altitudes où les grandeurs macroscopiques décrivant les différentes espèces sont déterminées par l'équilibre chimique et les très hautes altitudes où les particules sont libres. Ce type de situations apparaît dans de nombreux contextes comme la rentrée atmosphérique des engins spatiaux ou les semi-conducteurs. Cette hiérarchie de modèles (cinétique, hydrodynamique, diffusion) est liée aux échelles (de temps, d'espaces) que l'on souhaite décrire. Nous renvoyons aux travaux de B. Lucquin et P. Degond [137, 138, 139] pour des travaux dans ce sens en physique des plasmas et N. Ben Abdallah et P. Degond pour les semi-conducteurs [197]. Citons également les nombreux résultats sur les schémas cinétiques pour les systèmes hyperboliques et les travaux sur la généralisation des équations de l'hydrodynamique aux systèmes hors ETL, comme les modèles de Grad et plus récemment les modèles de Levermore [76, 75]. Ces différentes approches tentent à clarifier, du point de vue mathématique, le lien entre les différents modèles que l'on souhaite coupler. Mes travaux de thèse s'inscrivent dans ce cadre.

Plus précisément, j'ai caractérisé les domaines d'hyperbolicité des modèles proposés, ce qui aboutit à des conditions sur les flux de chaleur (modèles multi-moments) et sur les vitesses relatives (modèles multi-espèces). De plus, ces modèles, même lorsqu'ils sont hyperboliques sont généralement non conservatifs et il est nécessaire de déterminer les structures de chocs à l'aide d'analyse en onde progressive afin de déterminer les relations de saut physiquement raisonnables. Ces informations sont indispensables pour écrire un schéma numérique (basé sur la résolution de problème de Riemann) vérifiant les propriétés du modèle physique, en particulier l'adiabaticité des électrons.

On peut diviser ce travail en 2 grandes parties : l'étude de l'hyperbolicité des modèles multi-espèces et multi-moments et l'analyse mathématique du système des équations d'Euler couplées

avec l'équation de Poisson.

Hyperbolicité des modèles multi-espèces et multi-moments.

L'étude de l'hyperbolicité des modèles multi-espèces et multi-moments peut être vue comme une analyse de la stabilité du problème linéarisé. On montre dans le cas des modèles multi-moments (ou modèles de Grad) que l'hyperbolicité nécessite des conditions sur les flux de chaleur ioniques ([t1, t2]). Dans le cas de modèles multi-espèces, on exhibe une condition sur les vitesses relatives ([t3]). Un article de synthèse a été rédigé ensuite en collaboration avec L. Girard du C.E.P.T. présentant ces résultats sur l'hyperbolicité dans une revue de physique [a1]. En effet, ces modèles sont couramment utilisés par des équipes de physique bien qu'ils développent des instabilités aux altitudes où l'hyperbolicité n'est plus vérifiée et nécessitent donc un filtrage numérique pour donner des résultats plausibles. La condition d'hyperbolicité fournit donc un critère quantitatif pour garantir la validité du modèle. Dans le cas des modèles multi-moments, le flux de chaleur est une mesure de l'écart à l'ETL qu'il ne faut pas dépasser pour préserver la stabilité (linéaire) du système. Dans le cas des modèles multi-espèces, la condition sur les vitesses relatives est également liée à la validité du modèle (voir [180]) et aux phénomènes d'instabilité des deux jets (voir [s4] et section I-5).

Etude du système Euler-Poisson.

Les différents modèles Euler-Poisson ou Euler quasineutre évoqués dans cette partie sont présentés dans la section I-1.1.

analyse en onde progressive, structure de chocs non collisionnels.

Le modèle fluide le plus simple pour un plasma est le modèle **Euler quasineutre** où les électrons et les ions, de même vitesse et de même densité (par l'hypothèse de quasineutralité) ont des températures différentes. Ce système bien qu'inconditionnellement hyperbolique (et non linéaire) est sous forme non-conservative ce qui entraîne une indétermination des relations de saut physiques et donc des difficultés pour écrire un schéma numérique.

La détermination de ces relations de saut repose sur l'étude des **structures de chocs non collisionnels**. Ce domaine quasiment inexploré mathématiquement est fondamental en physique des plasmas. Il s'agit par exemple de comprendre les propriétés et la stabilité du Bow-shock qui protège la terre des particules envoyées par le soleil (vent solaire). Ce choc d'une épaisseur de quelques kilomètres seulement est totalement non collisionnel puisque le libre parcours moyen λ est de l'ordre de la distance terre-soleil. L'étude présentée ici est une première étape dans la compréhension mathématique de ces problèmes.

L'approche usuelle pour déterminer ces relations de saut consiste à régulariser le système en ajoutant une perturbation parabolique ce qui permet de construire les ondes de chocs comme limite de profils ondes progressives lorsque la viscosité tend vers 0. Pour un système sous forme non-conservative, on sait que les relations obtenues dépendent du choix du tenseur de viscosité considéré. Or, il n'y a pas souvent de choix physique d'un tel tenseur pour les modèles de plasma contrairement aux modèles d'écoulement diphasique, par exemple. Il est donc préférable

de revenir au système physique dont le modèle Euler quasineutre est un modèle asymptotique: le **système Euler-Poisson**.

En collaboration avec C. Schmeiser et P. Markowich, j'ai travaillé sur l'**analyse en onde progressive** du modèle Euler-Poisson. En effet, le modèle Euler-quasineutre est une limite singulière du modèle Euler-Poisson lorsque la longueur de Debye (qui est l'échelle caractéristique des perturbations de la neutralité électrique) tend vers 0. De plus, le modèle Euler-Poisson contrairement au modèle limite est sous forme conservative.

L'analyse du modèle isotherme [t6] pour lequel les températures sont constantes s'est révélée très intéressante. En effet, nous avons montré que l'analyse en onde progressive pouvait se ramener à l'étude d'un **système dynamique** de 2 équations dans l'espace des phases. Ce système hamiltonien possède **trois types de solutions** : ondes solitaires , chocs monotones (profils d'ondes progressives constitués de deux parties régulières reliées par un choc hydrodynamique ionique), chocs périodiques (profils constitués d'une partie régulière qui se raccorde par un choc hydrodynamique ionique sur un profil périodique). Ces trois types de solutions sont décrits de façon phénoménologique dans les livres sur les ondes de chocs non collisionnels dans les plasmas (par exemple [183], en particulier à propos des potentiels de Zagdeev). Nous avons montré mathématiquement l'existence de ces trois types de solutions qui correspondent à différentes valeurs du nombre de Mach que nous avons pu caractériser.

L'analyse du modèle Euler complet (avec des équations d'énergie) a alors été mise en œuvre [t4] et nous avons à nouveau construit explicitement les trois types de solutions. Lorsque la longueur de Debye tend vers 0, les solutions de type chocs tendent vers des solutions discontinues du système Euler quasineutre que l'on peut donc interpréter comme les chocs admissibles pour Euler quasineutre. Les autres types de solutions possèdent également une limite faible lorsque la longueur de Debye tend vers 0, mais ne peuvent pas servir à caractériser des solutions faibles non triviales du système Euler quasineutre. En effet, les "solitons" conduisent à des solutions constantes alors que les limites faibles des solutions "périodiques" ne sont pas solutions du système limite. Nous avons donc construit explicitement des solutions discontinues au système quasineutre dans le cas des chocs de type "monotone" qui correspondent à des nombres de Mach suffisamment grands ou de façon équivalente des chocs assez forts. En revanche, pour les chocs faibles, cette approche ne permet pas de conclure.

Théorèmes d'existence et simulations numériques.

J'ai montré l'existence globale de solutions faibles pour le modèle Euler-Poisson isotherme [t5] par une **méthode de Glimm** en adaptant un article de F. Poupaud, M. Rascle et J.P. Vila [59]. Leur méthode de démonstration qui concernait un modèle à une espèce pour les semi-conducteurs a pu être généralisée sans problème à un système multi-espèces de plasmas. J'ai continué à travailler sur ces problèmes après ma thèse (voir [a4], section 2).

Comme on l'a vu, l'analyse en onde progressive permet de déterminer la structure microscopique des chocs dans un plasma non collisionnel, au moins pour les chocs forts. Les relations de saut qu'on en déduit sont d'une part les relations de conservation classique : conservation de la masse (ou de la charge), de l'impulsion totale et de l'énergie totale. La relation de saut supplémentaire que nous avons obtenue exprime l'**adiabaticité des électrons**. En effet, les électrons plus légers que les ions ne subissent pas de chocs microscopiques et restent donc adiabatiques.

En utilisant ces relations de saut, j'ai montré que le **problème de Riemann** pour le système hyperbolique non-linéaire et non-conservatif Euler quasineutre possède une unique solution constituée de chocs, détente et discontinuités de contact séparés d'états constants. Il est remarquable que l'on puisse obtenir une solution explicite pour l'intersection des courbes de chocs, de détente et de discontinuités de contact pour ce système hyperbolique de 4 équations (densité, vitesse, 2 températures). En revanche, cette situation ne semble pas se représenter pour les systèmes hydrodynamiques multi-espèces même lorsqu'ils sont hyperboliques. Ce résultat permet de mettre en œuvre une **méthode de type Roe** pour la simulation numérique du système "Euler quasineutre" pour laquelle nous avons exhibé un vecteur paramètre adapté à l'obtention de la linéarisée de Roe. L'obtention explicite d'une linéarisée de Roe est exceptionnelle, en effet, une telle expression explicite connue dans le cas de la dynamique des gaz n'existe pas pour les gaz réactifs [d4].

Récemment, ce type de méthode a été utilisée et améliorée par B. Després et S. Jaouen au C.E.A. Limeil. Citons également les travaux de F. Coquel et C. Berthon pour la simulation de systèmes hyperboliques non conservatifs dont le système d'Euler quasineutre ou Euler à deux pressions est l'exemple typique. Ils montrent notamment comment résoudre ce type de système pour des lois de pression polytropiques (voir section I-1.1) avec des indices γ différents.

Revenons aux modèles d'échappement ionosphérique. La solution que nous proposons consiste à développer des modèles cinétiques pour les hautes altitudes. A basse altitude (inférieur à 1500 Km), les modèles cinétiques sont numériquement coûteux et il faut donc utiliser des modèles hydrodynamiques couplés par l'hypothèse de quasineutralité.

Les travaux que je vais présenter maintenant s'inscrivent dans cette double préoccupation: d'une part, essayer de comprendre les passages à la limite utilisés pour dériver les systèmes Euler-Poisson (limite quasineutre, instabilité double jet, ionisation) et, d'autre part, développer des méthodes numériques pour les modèles cinétiques et en particulier pour les opérateurs de collisions, qui soient compatibles avec les limites hydrodynamiques i.e. vérifier au niveau discret les propriétés qui assurent le retour de la fonction de distribution vers l'ETL (conservations, entropie, états d'équilibre).

Première partie

Modèles hydrodynamiques : systèmes Euler-Poisson

Introduction

Dans cette partie, on s'intéresse aux modèles hydrodynamiques dans lequel chaque espèce chargée (typiquement les électrons et les ions) est décrite par les premiers moments de sa fonction de distribution i.e. sa masse (ou de façon équivalente à adimensionnement près, sa charge, sa densité), sa quantité de mouvement (ou impulsion), et éventuellement son énergie (ou pression, ou température). Nous nous sommes intéressés plus particulièrement à des problèmes monodimensionnels. Ces modèles Euler-Poisson ont des applications en physique des plasmas, mais aussi pour les semiconducteurs [53, 46, 52, 59, 54], pour la description du transport des ions dans les canaux ioniques [27] ou encore en astrophysique [51, 50, 57]

Dans la première section, nous présentons cette modélisation dans le cadre des plasmas. Dans une seconde section, nous donnons les résultats d'**existence globale** en temps de solutions faibles [a4]. Dans la troisième partie, nous décrivons les résultats obtenus pour la justification de la **limite quasi-neutre** [a7, s1]. Ensuite, nous résumons les résultats obtenus pour les modèles d'**ionisation multi-espèces** [s3]. Enfin, nous montrons que l'**instabilité dite des deux jets** (linéaire) conduit au même type d'instabilité pour le problème non linéaire avec le même taux d'amplification, pour des temps petits [s4]. La dernière section est consacrée à mes directions de recherches futures.

1 Modèles hydrodynamiques pour les plasmas.

Dans cette section, nous présentons brièvement la dérivation des modèles Euler-Poisson, puis leur adimensionnement et ensuite les asymptotiques formels auquel l'adimensionnement conduit. Il ne s'agit pas de résultats nouveaux mais d'une description des différents systèmes Euler-Poisson sur lesquels portent les travaux détaillés dans cette partie.

1.1 Dérivation.

Un plasma est un mélange de N espèces de particules chargées : les électrons (indice e ou N) et des ions (indice $i = 1, \dots, N - 1$). Chacune des N espèces est décrite par sa densité n , sa vitesse macroscopique u et sa température T ou sa pression $p = nk_b T$ où k_b est la constante de Boltzmann. Ces trois variables d'état sont des grandeurs scalaires qui dépendent de la variable d'espace x et du temps $t \geq 0$ et sont solutions du système des équations d'Euler pour des particules chargées. La conservation de la masse s'écrit

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(n_i u_i) = g_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (1)$$

Le terme g_i traduit la présence de phénomènes d'ionisation et est généralement une fonction donnée des variables d'état (densités, températures). Ce phénomène a fait l'objet d'un travail qui sera décrit ultérieurement (voir section 4). La conservation de l'impulsion est donnée par

$$\frac{\partial}{\partial t}(n_i m_i u) + \frac{\partial}{\partial x}(n_i m_i u_i^2 + p_i) + q_i n_i E = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2)$$

où m_i (resp. q_i) est la masse (resp. charge) de la i^{eme} espèce, et E le champ électrique.

Ce système d'équations doit être fermé, par exemple par des équations d'état qui relient la pression partielle à la densité et la température, comme la loi isotherme (la température est alors constante)

$$p_i = n_i k_B T_i, \quad (3)$$

ou les lois polytropiques

$$p_i = n_i c_i^{\gamma_i} \quad (4)$$

où $c_i > 0$ et $\gamma_i > 1$ sont des constantes. Il est aussi possible de considérer des lois de conservation pour les énergies partielles, $W_i = \frac{1}{2}n_i m_i u_i^2 + \frac{3}{2}n_i k_B T_i$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (n_i m_i u_i^2 + 3n_i k_B T_i) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (n_i m_i u_i^3 + 5n_i k_B T_i u_i) + q_i n_i E u_i = 0, i = 1, \dots, N. \quad (5)$$

On obtient ce système à partir des équations cinétiques (Vlasov) en en prenant les premiers moments et en faisant une hypothèse dite de fermeture sur la forme de la fonction de distribution. Le système ci-dessus est obtenu en supposant que chaque espèce est à l'équilibre thermodynamique local (ETL) i.e. les fonctions de distribution sont des Maxwelliennes. Nous renvoyons par exemple à [184] pour une présentation physique de cette dérivation et à [137, 139] pour une présentation plus mathématique des différents modèles obtenus pour des mélanges de particules de masse différente suivant les échelles temporelles et spatiales auxquelles on s'intéresse. Enfin il existe d'autres hypothèses de fermeture comme celle proposée par H. Grad [70, 71, 72, 73, 74] que j'ai étudiée dans ma thèse [t1, t2] ou bien celle proposée par D. Levermore [76] sur laquelle j'ai également travaillé [s5]. Il s'agit d'étendre ces modèles hydrodynamiques à des situations hors équilibre thermodynamique sans résoudre les équations cinétiques sous jacentes. Nous reviendrons sur les équations cinétiques dans la seconde partie de ce mémoire.

Ces systèmes d'équations (pour $i = 1 \dots N$) sont couplés par le champ électrique E . Nous considérons ici des ions simplement chargés ($q_i = +e$ et $q_N = -e$ pour les électrons). Le champ électrique est donné par l'équation de Poisson qui s'écrit

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{e}{\epsilon_0} \left(\sum_{i=1}^{N-1} n_i - n_e \right). \quad (6)$$

où ϵ_0 est la constante diélectrique. On doit associer à ce modèle des conditions initiales et sur les bords du domaine qui seront précisées ultérieurement.

Remarque 1 *Du point de vue mathématique, le système (1)-(2)-(5)-(6) peut être interprété comme un système hyperbolique, en considérant la force électrique comme un terme source au même titre que l'ionisation. Le champ électrique ne modifie donc pas les relations de saut ni les $3N$ vitesses caractéristiques du système qui sont celles des équations d'Euler i.e. u_i , $u_i \pm \sqrt{\frac{5T_i}{3m_i}}$ pour tout $i = 1, \dots, N$. La difficulté vient du fait que ce terme source est non local.*

Il existe une autre écriture de l'équation (6), que l'on obtient en dérivant par rapport au temps et en intégrant suivant x en supposant qu'il n'y a pas de courant à l'infini:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{e}{\epsilon_0} \left(\sum_{i=1}^{N-1} n_i u_i - n_e u_e \right).$$

1.2 Adimensionnement.

Nous allons maintenant adimensionner le système (1)-(2)-(5)-(6). Soient n_0 , T_0 , m_0 , $q_0 = e$ et $x_0 = L$ les unités de densité, température, masse, charge et longueur. On définit une échelle de vitesse égale à la vitesse thermique $u_0 = \sqrt{k_b T_0 / m_0}$, de temps $t_0 = (L/u_0)$ et de champ électrique $E_0 = \frac{k_b T_0}{eL}$. On écrit alors $X = X_0 \bar{X}$ pour les différentes quantités (n, T, m, x, u, t, E) . Les variables sans dimensions satisfont alors (en supprimant les $\bar{}$ pour simplifier les notations) les systèmes (sans dimensions)

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(n_i u_i) = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(n_i m_i u_i) + \frac{\partial}{\partial x}(n_i m_i u_i^2 + n_i T_i) + q_i n_i E = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (8)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t}(n_i m_i u_i^2 + 3n_i T_i) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x}(n_i m_i u_i^3 + 5n_i T_i u_i) + q_i n_i E u_i = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (9)$$

où q_i est égal à -1 pour les électrons ($i = N$) et $+1$ pour les ions ($i = 1, \dots, N-1$). Ces N systèmes sont toujours couplés par le champ électrique qui est donné par l'équation de Poisson adimensionnée

$$\lambda^2 \frac{\partial E}{\partial x} = \sum_{i=1}^{N-1} n_i - n_e, \quad (10)$$

où $\lambda = \frac{\lambda_D}{L}$ est la longueur de Debye adimensionnée

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_b T_0}{n_0 e^2}}. \quad (11)$$

Dans la suite, sauf mention du contraire, on s'intéresse aux modèles isothermes (3). L'hyperbolicité des modèles à plusieurs espèces d'ions nécessite des conditions sur les vitesses relatives qui sont détaillées dans [t3]. La plupart des résultats ont été obtenus dans le cas $N = 2$ à l'exception de l'étude du problème d'ionisation multi-espèces traité en section 4. Dans la suite, on note ($E2P$) le système (1)-(2)-(5)-(10).

La validité physique de ces modèles tient à la remarque suivante. On peut montrer à partir de la théorie cinétique collisionnelle des plasmas que les temps de relaxation des fonctions de distribution par interaction mutuelle varient comme la racine carré de la masse des particules (à température et densité comparable). Soit τ_e le temps de relaxation des électrons vers la Maxwellienne (respectivement τ_i celui des ions) et τ_E le temps de relaxation des énergies. On a alors:

$$\tau_E = \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2} \tau_i = \left(\frac{m_i}{m_e}\right) \tau_e. \quad (12)$$

Il est donc légitime de considérer un modèle fluide pour les ions et un équilibre de Maxwell-Boltzmann pour les électrons plus légers avec des températures différentes mais du même ordre de grandeur. Nous renvoyons à [181, 184, 180] pour une discussion détaillée de la physique des plasmas.

1.3 Asymptotiques formelles.

Les systèmes Euler-Poisson décrits ci-dessus comportent quelques paramètres sans dimension parmi lesquels la longueur de Debye adimensionnée λ , les masses, les températures.

Les températures étant généralement du même ordre de grandeur, elles apparaissent dans le modèle comme des paramètres fixés. Lorsque la température est très petite, on peut être amené à considérer des modèles sans pression (voir par exemple les sections 4 et 5). Ces modèles conduisent à des difficultés mathématiques comme l'apparition de solutions mesures. Citons par exemple [39, 26, 3, 4]. Dans un premier temps, la température électronique est choisie comme référence pour fixer les idées, soit $T_e = 1$ et $T_i = O(1)$.

La longueur de Debye (11) est l'échelle pour laquelle peuvent exister des écarts à la neutralité électrique. Lorsque l'on s'intéresse à des échelles spatiales L grandes devant λ_d , on obtient la limite quasi-neutre (voir [179, 181, 184]):

$$n_e = \sum_{i=1}^{N-1} n_i. \quad (13)$$

La présentation détaillée de cette limite (et sa justification) fait l'objet des sections 3.1 et 3.2. Il reste donc les masses dont le rapport (entre masse des électrons et masse des ions) est petit.

Si on choisit pour la masse des ions comme masse de référence, les électrons sont à l'équilibre thermodynamique et satisfont la relation de Maxwell-Boltzmann. Celle-ci relie leur densité macroscopique n_e au potentiel électrique ϕ

$$n_e(x,t) = \int_{v \in \mathbb{R}^3} f_e(x,v,t) dv = n_0 \exp\left(\frac{e\phi}{k_B T_e}\right). \quad (14)$$

Du point de vue physique, cette hypothèse est justifiée par l'approximation de masse des électrons qui est négligeable devant celle des ions. En effet, l'équation de conservation de la quantité de mouvement électronique s'écrit

$$m_e \left\{ \frac{\partial(n_e u_e)}{\partial t} + \frac{\partial(n_e u_e^2)}{\partial x} \right\} + \frac{\partial n_e T_e}{\partial x} = -n_e E, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R} \quad (15)$$

avec u_e la vitesse moyenne des électrons, T_e leur température. Lorsque l'on fait tendre m_e vers 0 dans (15), on obtient formellement

$$\frac{\partial n_e}{\partial x} = n_e \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (16)$$

L'adimensionnement décrit ci-dessus (en choisissant la température de référence $T_e = 1$) conduit à la forme sans dimension suivante de la relation de Maxwell-Boltzmann

$$n_e(x,t) = \exp(\phi), \quad (17)$$

et l'équation de Poisson est alors une équation elliptique non linéaire pour le potentiel électrique ϕ . On note le système obtenu, qui fait l'objet de la section suivante, (*EPNL*). Cette

asymptotique ($m_e \rightarrow 0$) est couramment utilisée en physique des plasmas. Il n'a pas encore de justification mathématique mais cela fait l'objet de travaux en cours [e3].

La limite quasi-neutre du système Euler-Poisson non linéaire (voir section 3.1) donne le système dit Euler quasi-neutre (EQ) qui est en fait le système des équations d'Euler dans lequel la loi d'état qui détermine la pression est modifiée pour prendre en compte la pression totale (ionique et électronique):

$$p = nk_B(T_e + T_i).$$

Lorsqu'on prend la limite quasi-neutre du système de 2 équations d'Euler (voir section 3.2), on obtient également un système analogue avec la pression (resp. masse) égale à la somme des pressions (resp. masses) ionique et électronique. On peut faire tendre la masse électronique (adimensionnée) vers 0 dans ce système et on aboutit à nouveau au système (EQ). Nous renvoyons à la section 3 pour une description plus précise de la limite quasi-neutre.

Lorsqu'on se place à l'échelle des électrons (i.e. on adimensionne les masses par m_e , pour les applications aux semiconducteurs, par exemple), les ions sont souvent supposés immobiles et constituent un 'fond neutralisant' ou profil de dopage dans le contexte des semiconducteurs. Dans la suite, on désigne par (EP) le système d'équation correspondant (pour les variables n, u) au couplage des équations d'Euler à l'équation de Poisson (linéaire). Ce système fait l'objet de nombreuses études [59, 49, 40, 41]. Notons que la limite quasi-neutre de ce modèle est sans intérêt puisque la limite formelle correspond à des électrons immobiles de même densité que les ions.

Nous allons maintenant présenter les différents résultats obtenus sur ces systèmes Euler-Poisson.

2 Existence de solutions faibles par méthode de Glimm [a4]

En coll. avec Y. Peng (Univ. Clermont Ferrand)

L'existence de solutions faibles entropiques globales en temps pour les systèmes Euler-Poisson a fait l'objet de nombreux travaux, basés soit sur les méthodes de Glimm, soit sur la compacité par compensation. Pour le système (EP), Poupaud, Rascle et Vila ont montré dans [59] que la propriété de propagation à vitesse finie du support restait valable en couplant Euler à Poisson. Leur preuve s'adapte assez facilement au cas ($E2P$) et a fait l'objet d'une note [t5] tirée de la thèse. L'extension au cas ($EPNL$) est plus délicate. Ce travail, également basé sur une méthode de Glimm, est paru dans M2AN [a4]. Pour les résultats similaires obtenus par des techniques de compacité par compensation, pour des équations d'état polytropiques (4), citons [52, 49].

Dans cet article, on note (E-PNL) le système des équations d'Euler-Poisson non linéaire, dans le cas isotherme,

$$\begin{aligned} \partial_t n + \partial_x(nu) &= 0, \\ \partial_t(nu) + \partial_x(nu^2 + nT_i) &= nE = -n\partial_x\phi, \\ -\partial_{xx}^2\phi &= n - \exp(\phi), \end{aligned}$$

auquel on ajoute les conditions initiales:

$$n(0,x) = n^0(x), \quad u(0,x) = u^0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (18)$$

On suppose que seule une région bornée est hors de l'équilibre; plus précisément, on suppose que le plasma est uniforme et électriquement neutre à l'extérieur de cette région i.e. il existe des constantes n^\pm , L^0 et u_0^\pm telles que

$$n_e^0(x) = n^0(x) = n^\pm, \quad u^0(x) = u_0^\pm, \quad \pm x > L^0, \quad (19)$$

où $\pm x > L^0$ représente naturellement $+x > L^0$ ou bien $x < -L^0$. Nous montrons que la région hors équilibre s'étend à vitesse finie i.e. il existe une fonction croissante de t telle que $L(t) = L^0$ et

$$n_e(x,t) = n(x,t) = n^\pm, \quad \pm x > L(t), t > 0, \quad (20)$$

$$u(x,t) = u^\pm, \quad \pm x > L(t), t > 0. \quad (21)$$

Cette propriété est due à la propagation à vitesse finie du support des solutions d'un système hyperbolique. En effet, le potentiel électrique étant constant à l'extérieur, le champ électrique y est donc nul et la vitesse à l'infini reste donc constante. On peut noter que cette propriété de la vitesse à l'infini est basée sur l'hypothèse physique de vitesse égale à l'infini pour les neutres et les ions et sur l'absence de champ électrique extérieur (hypothèses de quasineutralité et de courant aligné nul à l'infini).

La condition sur la densité uniforme hors du domaine impose un potentiel constant que l'on peut calculer par (17). On ajoute donc au problème elliptique non linéaire en ϕ des conditions aux limites de type Dirichlet

$$\phi(\pm L(t)) = \ln(n^\pm). \quad (22)$$

La borne $L(t)$ est soit une fonction affine du temps t dont la pente est fixée a priori pour vérifier la condition C.F.L. de la méthode de Glimm pour tout $t \in [0, T]$, soit une fonction continue et croissante qu'on ne peut pas décrire explicitement mais que l'on construit. Nous présentons la seconde solution car elle permet d'obtenir un résultat d'existence pour un temps d'existence T arbitrairement grand.

Les conditions aux limites n'imposent pas que le champ électrique soit nul en $x = \pm L(t)$. Cependant elles peuvent être vues comme une approximation des conditions sur le problème posé sur la droite réelle que l'on tente d'approcher. Il n'est pas possible de résoudre le problème avec la méthode que nous présentons sur toute la droite réelle car on perd alors la propagation à vitesse finie du support de la perturbation électrique et l'estimation de la variation totale du champ électrique qui sont les deux propriétés essentielles de la construction. De plus, cette propriété est cruciale du point de vue numérique. Nous montrons le résultat suivant

Théorème 2.1

On suppose

$$n^0 \geq n_{min} > 0, \quad n^0, u^0 \in BV(\mathbb{R}). \quad (23)$$

Soit $T > 0$, il existe une fonction L pour $t \in [0, T]$, continue, croissante, vérifiant $L(0) = L^0$ et telle que le problème (E-PNL) possède une solution faible entropique sur $[0, T]$ pour les conditions initiales (18) vérifiant les hypothèses (19) et des conditions aux limites données par (22).

Rappelons qu'une solution des équations d'Euler est dite entropique si elle vérifie

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial(Su + nT_i u)}{\partial x} - nuE - n\sigma(u - u_*)u \leq 0, \quad (24)$$

au sens des distributions, où l'entropie spécifique ionique $S(x,t)$ est définie par $S = \frac{1}{2}nu^2 + nT_i \ln(n)$.

Les étapes de la démonstration sont les suivantes : on construit des solutions approchées du problème (E-PNL). La méthode utilisée est constituée d'une méthode de Glimm pour la partie hyperbolique sans les termes de source (champ électrique auquel on peut ajouter des collisions ions-neutres) qui sont pris en compte en intégrant une équation différentielle ordinaire pour la vitesse. La résolution numérique de l'équation de Poisson non linéaire peut être réalisée par plusieurs méthodes : éléments finis, linéarisation [58], ou bien encore sursolutions [61]. Nous ne détaillerons pas ces méthodes et nous utiliserons uniquement certaines propriétés des solutions. Ensuite, nous rappelons quelques propriétés classiques pour les solutions du problème de Riemann associé au système des équations d'Euler isotherme. Le résultat principal est la décroissance de la variation totale de $\ln(n)$ en temps avec le schéma de Glimm (voir [8] et aussi [15]). Nous utilisons également un argument de domaine invariant pour le problème de Riemann dans le plan (n,u) pour contrôler la norme $\|u\|_{L^\infty}$ qui détermine la condition C.F.L.. La preuve de la convergence suit ensuite la méthode utilisée dans [59].

Citons pour conclure les travaux de Y. Guo dans le cas polytropique, tridimensionnel et irrotationnel, qui montre l'existence globale de solutions régulières pour des données petites [40]. Pour des données assez grandes, Guo et Shahi montrent dans [41] que les solutions explosent en temps grand en utilisant une méthode due à Sideris [60]. Citons aussi les travaux de B. Perthame [51, 50] sur le système Euler-Poisson dans le cas sphérique.

3 Limite quasi-neutre

En collaboration avec E. Grenier (ENS Lyon).

Nous avons étudié la limite quasi-neutre (lorsque la longueur de Debye tend vers 0) du système Euler-Poisson non linéaire (EPNL). Nous montrons la convergence de solutions suffisamment régulières du système à longueur de Debye fixée vers les solutions du système limite (utilisé en physique des plasmas et appelé système des équations d'Euler quasi-neutre). La convergence a lieu en temps petit. Ce résultat utilise des techniques de calcul pseudodifférentiel et des estimations d'énergie. Cet article va paraître dans [a7].

Nous avons étendu l'étude de la limite quasi-neutre au cas de 2 systèmes d'équations d'Euler couplés par l'équation de Poisson. Ce travail est soumis pour publication [s1].

3.1 Euler-Poisson non linéaire [a7]

Ce travail en collaboration avec E. Grenier est détaillé dans l'article [a7].

On considère à nouveau des ions de vitesse $u(t,x)$ et de densité $n(t,x)$ évoluant suivant (EPNL)

$$\partial_t n + \nabla \cdot (nu) = 0, \quad (25)$$

$$\partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \frac{T_i}{n} \nabla n = -\nabla \Phi, \quad (26)$$

où T_i est la température des ions, supposée constante, et où le potentiel électrique Φ satisfait une équation de Poisson non linéaire

$$-\lambda^2 \Delta \Phi = n - \exp(\Phi/T_e). \quad (27)$$

Rappelons que ce système possède des solutions faibles globales en temps (paragraphe précédent). Ce système s'obtient à partir du système d'Euler Poisson à deux espèces (voir dérivation section 1.1 et paragraphe suivant) en faisant tendre la masse des électrons vers 0, leur densité étant alors donnée par $\exp(\Phi/T_e)$. On considère le système posé sur toute la droite réelle ou sur le tore. Sur la droite réelle \mathbb{R} , on impose que le potentiel $\Phi \rightarrow 0$ quand $|x| \rightarrow +\infty$ et sur le tore \mathbb{T} on suppose qu'il est périodique, ce qui donne dans les 2 cas: $\int E = 0$. Ce modèle est doté de conditions initiales et on impose des conditions périodiques sur le tore. Lorsque λ tend vers 0, formellement $\Phi = T_e \log n$ et le système limite est

$$\partial_t n + \nabla \cdot (nu) = 0, \quad (28)$$

$$\partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \frac{T_i + T_e}{n} \nabla n = 0. \quad (29)$$

La limite $\lambda \rightarrow 0$ est un problème de perturbation singulière d'un système hyperbolique non linéaire par un opérateur d'ordre -2 . Pour une théorie des perturbations singulières, nous renvoyons à [12, 5, 16]. La principale difficulté est d'obtenir des bornes a priori qui soient uniformes en λ . Le cœur de ce travail est l'obtention d'estimations d'énergie sur le système linéarisé de (25,26,27) à l'aide de techniques pseudo-différentielles (qui tirent profit de la structure algébrique de l'opérateur et des annulations de certains coefficients). Ensuite, nous appliquons les méthodes d'estimation d'énergie développées par E. Grenier dans [9].

Il ne s'agit pas d'une limite oscillante, mais de l'étude de la dégénérescence d'un opérateur elliptique (du type $Id - \lambda^2 \Delta$) en l'identité quand λ tend vers 0. On considère donc des données initiales bien préparées. Bien que $(Id - \lambda^2 \Delta)^{-1}$ soit régularisant, il ne l'est pas uniformément par rapport au petit paramètre, ainsi le terme de force $\nabla \Phi$ doit être traité (après linéarisation) comme un opérateur pseudodifférentiel d'ordre 1 en n , et non d'ordre -1 . En fait sur des échelles spatiales très grandes devant λ (longueur de Debye en physique), c'est-à-dire pour des $|\xi|$ (variable duale de Fourier), très petits devant $1/\lambda$, le système se comporte comme le système limite (EQ), tandis que pour des échelles spatiales très petites devant λ ($|\xi| \gg \lambda^{-1}$), le système se comporte comme si il n'y avait pas de forces électriques i.e. $\nabla \Phi = 0$. La transition ayant lieu pour $|\xi| \sim \lambda^{-1}$. Ce rôle particulier de $\lambda \xi$ conduit naturellement à faire des estimations d'énergie avec des symétriseurs qui dépendent de ξ de façon non triviale et à utiliser à nouveau le calcul pseudodifférentiel. On se place sur le tore \mathbb{T} pour simplifier l'énoncé du résultat principal

Théorème 3.1

Soit $(n_0^0, u_0^0) \in H^s(\mathbb{T})$ avec s assez grand, et soit $(n^0(t), u^0(t)) \in H^s(\mathbb{T})$ la solution de (28,29) avec donnée initiale (n_0^0, u_0^0) , solution existant sur un intervalle de temps $[0, T^*]$, avec $T^* \leq +\infty$. Alors il existe des solutions (n^λ, u^λ) à (25,26,27) avec données initiales (n_0^0, u_0^0) , sur un intervalle de temps $[0, T^\lambda]$, avec $\liminf_{\lambda \rightarrow 0} T^\lambda \geq T^*$. De plus pour tout $T' < T^*$, $\lambda^{-1}(n^\lambda - n^0)$ et $\lambda^{-1}(u^\lambda - u^0)$ sont bornées dans $L^\infty([0, T'], H^{s'}(\mathbb{T}))$ pour λ assez petit ($s' < s$ dépendant de s et tendant vers l'infini quand s tend vers l'infini).

On justifie ainsi le passage à la limite $\lambda \rightarrow 0$ pour des données initiales régulières, tant que le système limite admet une solution régulière.

3.2 Deux systèmes d'Euler couplé par Poisson [s1]

Ce travail en collaboration avec E. Grenier est détaillé dans [s1].

On étudie la limite quasi-neutre $\lambda \rightarrow 0$ d'un plasma unidimensionnel composé d'électrons de masse m_e , de température T_e constante, de vitesse u_e , de densité n_e , et d'ions de masse m_i , de température T_i constante, de vitesse u_i , de densité n_i , accélérés par le champ électrique $\partial_x \Phi$ qu'ils créent. Le système ($E2P$) s'écrit

$$\partial_t n_\alpha + \partial_x(n_\alpha u_\alpha) = 0, \quad (30)$$

$$\partial_t u_\alpha + u_\alpha \partial_x u_\alpha + \frac{T_\alpha}{m_\alpha} \partial_x n_\alpha = -\frac{q_\alpha}{m_\alpha} n_\alpha \partial_x \Phi, \quad (31)$$

$$-\lambda^2 \partial_{xx}^2 \Phi = n_i - n_e, \quad (32)$$

avec $\alpha = i, e$, $q_i = 1$ et $q_e = -1$. Formellement, lorsque λ tend vers 0 on a $n_e = n_i$, ce qui conduit à $u_e = u_i$. L'équation limite est alors (EQ)

$$\partial_t n_i + \partial_x(n_i u_i) = 0, \quad (33)$$

$$\partial_t(n_i u_i) + \partial_x(n_i u_i^2 + n_i \frac{T_i + T_e}{m_i + m_e}) = 0. \quad (34)$$

Comme il n'y a aucune raison que les données initiales vérifient $n_e = n_i$ et $u_e = u_i$, des oscillations apparaissent à la limite. Ce n'est pas l'objet de notre étude et on se restreint au cas de données initiales "bien préparées", c'est-à-dire vérifiant $n_e = n_i$ et $u_e = u_i$. L'échelle de Debye λ joue un rôle particulier, et $\lambda \xi$ est à nouveau un paramètre essentiel dans l'étude du linéarisé, ce qui conduit à nouveau à faire des estimations fines d'énergie grâce au calcul pseudodifférentiel. Les difficultés pour appliquer cette méthode viennent du fait que la base de vecteurs propres du système linéarisé devient singulière quand $\lambda \rightarrow 0$. Ceci nous oblige non seulement à considérer des conditions initiales bien préparées mais aussi, à utiliser des opérateurs pseudodifférentiels pour construire des solutions approchées. On montre le

Théorème 3.2

Soient n_0^0 et u_0^0 dans $H^{\tilde{s}}$ pour \tilde{s} assez grand, et soit (n^0, u^0) la solution régulière du système limite (33,34) avec donnée initiale (n_0^0, u_0^0) , solution existant sur un intervalle de temps $[0, T]$. Alors pour tout $0 < T' < T$, et pour λ assez petit, il existe des solutions $(n_i^\lambda, n_e^\lambda, u_i^\lambda, u_e^\lambda)$ de (30,31,32) avec données initiales $(n_0^0, n_0^0, u_0^0, u_0^0)$ uniformément bornées dans $L^\infty([0, T'], H^s(\mathbb{T}))$, avec $s = \tilde{s} - \theta$ (θ étant une constante universelle). De plus ces solutions convergent fortement dans $L^\infty([0, T'], H^s(\mathbb{T}))$ vers (n^0, n^0, u^0, u^0) quand λ tend vers 0.

On montre donc la convergence vers le système limite pour des données initiales régulières tant que la solution limite reste régulière. On part d'une solution approchée très précise et on s'appuie sur une étude détaillée du linéarisé à coefficients constants de (30,31,32) et de son comportement quand $\lambda\xi$ tend vers zéro.

4 Ionisation multi-espèces [s3].

En coll. avec C. Buet (C.E.A. Limeil), P.-A. Raviart (CMAP).

Ce travail porte sur un modèle fluide multi-espèce d'ionisation qui est détaillé dans [s3]. Ce modèle conduit à un système d'équations différentielles ordinaires, mais singulières à l'origine. L'existence de solutions maximales pour ce système a pu être démontrée et des simulations numériques permettent de calculer les courants émis par chaque espèce d'un faisceau d'ions, ce qui intéresse les physiciens. De nouvelles perspectives sont envisagées pour mieux comprendre les propriétés mathématiquement surprenantes mais physiquement raisonnables de ce type de modèle.

L'étude d'un modèle cinétique d'ionisation montre que les températures ioniques restent faibles dans la zone d'ionisation (voir note [d5]). Cela conduit à considérer un modèle fluide où les ions sont froids, plus facile à étudier numériquement que le modèle cinétique. On cherche des solutions stationnaires du système Euler-Poisson qui s'écrit cette fois

$$\frac{d}{dx}(n_\alpha u_\alpha) = g_\alpha(n_e), \quad \alpha = 1, \dots, N-1, \quad (35)$$

$$\frac{d}{dx}(n_\alpha u_\alpha^2) - n_\alpha \frac{d\phi}{dx} = 0 \quad (36)$$

$$\lambda \frac{d^2\phi}{dx^2} = \sum_\alpha n_\alpha - n_e, \quad n_e = \exp(-\phi), \quad (37)$$

avec les conditions aux limites et la condition de quasineutralité en $x = 0$

$$u_\alpha(0) = 0, \phi(0) = \frac{d\phi}{dx}(0) = 0, \sum_\alpha n_\alpha(0) = n_e(0) = 1. \quad (38)$$

Nous allons étudier plus particulièrement l'approximation plasma obtenue en supposant la quasineutralité du plasma ($\lambda = 0$). L'équation d'impulsion ionique s'écrit alors

$$\frac{d}{dx}(n_\alpha u_\alpha^2) + \frac{n_\alpha}{n_e} \frac{dn_e}{dx} = 0, \quad (39)$$

avec $n_e = \exp(-\phi) = \sum_{\alpha} n_{\alpha}$. Il s'agit d'abord d'étudier l'existence et l'unicité de la solution du problème ainsi que ses propriétés qualitatives. Dans le cas $N = 2$, on sait calculer explicitement la solution maximale (et les courants émis qui sont indépendants du taux d'ionisation). On veut généraliser ce résultat. Posons $p = N - 1$ le nombre d'espèces d'ions. On appelle solution (physiquement admissible) du système différentiel (35,39), une fonction $U = (n_1, \dots, n_p, j_1, \dots, j_p)$, où $U : x \in \mathbb{R}_+ \rightarrow U(x) \in \mathbb{R}^{2p}$ de classe C^1 solution de (35,39) et vérifiant $n_{\alpha}(x) > 0$ pour tout $\alpha = 1, \dots, p$.

Pour fixer les idées, on suppose que chaque taux d'ionisation (adimensionné) $g_{\alpha} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction de classe C^1 croissante qui vérifie $g_{\alpha}(n_e) > 0 \forall n_e > 0$. En pratique, les taux d'ionisation g dépendent des processus d'ionisation et sont des polynômes de n_e . On a alors le résultat suivant

Théorème 4.1

Le modèle fluide dans l'approximation plasma admet une solution (physiquement admissible) unique définie dans un intervalle maximal $[0, x_0[$ où $x_0 < +\infty$ est tel que $U(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} U(x)$ existe et vérifie (en x_0)

$$\sum_{\alpha} \frac{n_{\alpha}}{u_{\alpha}^2} = n_e, \quad \sum_{\alpha} n_{\alpha} u_{\alpha}^2 = 1 - n_e; \quad (40)$$

de plus, les dérivées de U explosent en x_0

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{dn_{\alpha}}{dx}(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{du_{\alpha}}{dx}(x) = +\infty; \quad (41)$$

et la fonction n_e est strictement décroissante dans $[0, x_0]$ et $n_e(x_0) \leq 1/2$.

La première étape de la démonstration consiste à prouver que n_e est solution d'une équation intégrale non linéaire qui va nous servir d'une part à obtenir un résultat d'existence et d'unicité locale de la solution de au voisinage de $x = 0$ et d'autre part à calculer numériquement la solution fournie par le Théorème 4.1.

Lemme 4.2

La densité électronique n_e est solution de l'équation plasma

$$n_e(x) = 1 - \sum_{\alpha} \sqrt{-2 \int_0^x \left(\frac{j_{\alpha}^2}{n_e} \frac{dn_e}{dx} \right)(y) dy}, \quad (42)$$

où j_{α} est donné en fonction de n_e par

$$j_{\alpha}(x) = \int_0^x g_{\alpha}(n_e(y)) dy. \quad (43)$$

L'existence d'une solution maximale pour l'équation plasma (42) n'est pas immédiate. Celle-ci repose sur la construction de solutions approchées qui permettent de supprimer la singularité du problème à l'origine. Une fois que les solutions ont "décollé", il faut vérifier qu'elles ont le bon comportement et qu'elles convergent vers une solution du problème. Cette technique est

également utile du point de vue numérique. Nous montrons que les solutions numériques sont telles que les vitesses des différentes espèces d'ions sont très proches (mais distinctes) et le point x_0 est caractérisé par

$$n_e(x_0) \approx 1/2, u_\alpha(x_0) \approx 1,$$

ce qui correspond au cas mono-espèce et qui est physiquement raisonnable. Nous comparons les résultats de ce modèle avec d'autres (cinétique, mono-cinétique) et nous montrons comment traiter les termes de friction, le système quasi-neutre ($\lambda \ll 1$) et enfin, nous montrons, en reprenant des résultats de [t3], que l'hyperbolicité du système d'évolution associé à (35,39) impose que les vitesses des différentes espèces soient égales.

5 Instabilité des deux jets [s4]

En coll. avec E. grenier (ENS Lyon) et Y. Guo (Brown Univ, USA)

Dans ce travail, on s'intéresse à l'un des exemples classiques d'instabilité en physique des plasmas. Rappelons brièvement la situation: deux faisceaux d'électrons (de densité n_1 et n_2) se déplacent à des vitesses uniformes différentes. Ces électrons sont neutralisés par des ions qui sont supposés immobiles. Cette hypothèse est correcte pour des effets 'hautes fréquences' en raison de la forte inertie des ions. L'interaction de ces deux jets produit un champ électrique qui s'amplifie. Les taux d'amplification peuvent être calculés à partir des équations fluides linéarisées (conservation de la masse et de l'impulsion sans pression), voir [184]. Certains dispositifs comme les amplificateurs à ondes progressives sont basés sur ce phénomène [56, 58]. Nous montrons que cette instabilité (linéaire) est également présente pour les solutions du problème non linéaire.

Le principal ingrédient de la démonstration est de construire une solution approchée (dont le premier terme correspond à la solution du problème linéarisé) et de contrôler l'erreur commise. On considère par exemple le système sur le tore :

$$\partial_t n_i + \partial_x(n_i u_i) = 0, \quad \partial_t u_i + u_i \partial_x u_i = -\frac{e}{m_e} E, \quad \partial_x E = -4\pi(n_1 + n_2 - 1), \quad (44)$$

avec $i = 1, 2$ et en imposant la condition de neutralité globale

$$\int_{\mathbb{T}^d} [n_1^0(x) + n_2^0(x) - 1] dx = 0. \quad (45)$$

On a le

Théorème 5.1

Soit $(n_1^0, n_2^0, u_1^0, u_2^0)^T$ un état d'équilibre (linéairement) instable alors il est non linéairement instable au sens suivant: pour s assez grand, il existe $\epsilon_0 > 0$, tel que pour tout $\delta > 0$ suffisamment petit, il existe une solution notée $w^\delta(t, x)$ du système (44) tel que $\|w^\delta(0, x)\|_{H^s(\mathbb{T}^d)} \leq \delta$ mais pour un certain $T^\delta = O(|\ln \delta|)$, on a

$$\|w^\delta(T^\delta, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{T}^d)} \geq \epsilon_0, \quad \text{et} \quad \|w^\delta(T^\delta, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d)} \geq \epsilon_0. \quad (46)$$

On caractérise les états d'équilibre instable en étudiant la relation de dispersion i.e. la relation entre ω et k pour des perturbations de l'état $(n_1^0, n_2^0, u_1^0, u_2^0)^T$ de la forme $\exp(i(kx - \omega t))$ ou de façon équivalente, on étudie l'hyperbolicité du système comme dans certains travaux de ma thèse [t1, t2, t3].

6 Travaux en cours et perspectives.

Pour terminer cette partie, je présente 2 axes de recherches actuels à propos des systèmes Euler-Poisson.

6.1 Euler sans pression-Poisson [e1]

Je travaille avec F. James sur le couplage des équations d'Euler sans pression avec l'équation de Poisson (linéaire pour commencer). Ce type de modèle est couramment utilisé en physique des plasmas froids. En effet, l'équation de Vlasov pour une fonction mono-cinétique se ramène aux équations de conservation de la masse et de l'impulsion sans terme de pression. Cette approximation a été faite par exemple dans le problème d'ionisation exposé en section 4 et dans l'instabilité des deux jets en section 5.

On sait depuis les travaux de Bouchut et James que les équations d'Euler sans pression conduisent à des solutions mesures [3, 4, 24]. Dans le cas des solutions régulières, le système Euler sans pression couplé avec Poisson se ramène à une équation de type Burgers avec terme source pour la vitesse u (des électrons)

$$\partial_t u + u \partial_x u = -\frac{e}{m_e} E,$$

la densité étant donnée par la conservation de la masse

$$\partial_t n + \partial_x (nu) = 0,$$

et le champ électrique par l'équation de Poisson (linéaire)

$$\lambda^2 \partial_x E = n - 1.$$

Si on considère un choc compressif pour la vitesse (typiquement $u(t=0, x) = -sgn(x)$) avec une densité uniforme constante $n(t=0) = 1$, on obtient une concentration en $x=0$ de la densité $n(x, t) = 1 + 2t\delta(x=0)$. Cette solution est LA solution en dualité du système Euler sans pression. Le couplage avec l'équation de Poisson a un effet régularisant : le champ électrique engendré par cette concentration à l'origine diminue l'amplitude du saut en vitesse et la masse concentrée en 0, au lieu d'augmenter indéfiniment en temps, reste borné. Le but de ce travail est de justifier mathématiquement l'effet du couplage des équations d'Euler sans pression avec Poisson et en particulier lors de la formation d'une discontinuité (comme celle décrite précédemment). Nous montrons qu'il existe une valeur critique de λ en deçà de laquelle les discontinuités ne peuvent se former. L'objectif est de mieux comprendre le comportement des solutions afin de décrire les solutions du problème de Riemann et de développer des méthodes numériques adaptées.

Cette analyse est à rapprocher des travaux de Y. Guo sur d'une part l'existence globale de solutions régulières pour le problème Euler-Poisson (3D, irrotationnel) pour des données petites et régulières [40] et d'autre part l'explosion de telles solutions (dans le cas sphérique) pour une vitesse suffisamment grande [41]. Mentionnons également les problèmes de type double couche [47] et des structures de chocs non collisionnels que j'ai évoqués dans le résumé de ma thèse.

6.2 Limite masse électronique petite $m_e \rightarrow 0$ [e3]

Avec E. Grenier, nous essayons de justifier l'approximation de masse électronique petite (les électrons étant au moins 1836 fois plus légers que les ions), couramment utilisée en physique des plasmas. La limite $m_e \rightarrow 0$ conduit, nous l'avons vu, à une relation entre le potentiel électrique ϕ et la densité électronique n_e connue sous le nom de relation de Maxwell-Boltzmann. Cette asymptotique est couramment utilisée en physique des plasmas, parfois sous d'autres formes comme par exemple le champ électrique ambipolaire qui exprime le champ électrique E en fonction du gradient de pression électronique. Il n'y a, à ma connaissance, pas encore de justification mathématique satisfaisante de ce passage à la limite de (15) vers (16). Ce résultat serait intéressant du point de vue théorique et physique et montrerait que le second modèle étudié (E2P) tend vers (EPNL) lorsque l'on néglige la masse des électrons.

Deuxième partie

Modèles cinétiques : opérateurs de collisions

Introduction

Dans cette partie, je présente les travaux dans le cadre des équations cinétiques et plus particulièrement pour la résolution numérique des opérateurs de collisions : Boltzmann, Fokker-Planck-Landau et Lorentz.

Dans le cadre cinétique, chaque espèce est caractérisée par sa fonction de distribution f qui est une fonction positive des variables d'espace x , de vitesse v et du temps t . La mesure $f dx dv$ représente la probabilité de présence d'une particule au point x avec une vitesse v à l'instant t . La fonction de distribution f est solution d'une équation de transport dans l'espace des phases (x,v) , appelée équation de Vlasov, dans laquelle apparaît un terme de force qui est un champ "moyen" ne prenant en compte que les interactions collectives à longue portée. Pour des particules chargées par exemple, il s'agit de la force due aux champs électromagnétiques appliqués (par exemple, un champ électrique ou magnétique extérieur...) ou auto-consistants (i.e. générés par les particules elles-mêmes). Cette équation peut éventuellement comprendre des termes sources afin de modéliser les collisions entre particules ou la création de nouvelles particules par ionisation (voir section 4, partie I). Pour une seule espèce de particules de masse m sous l'action d'un champ de force $F = F(t,x,v)$, l'équation de Vlasov s'écrit

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f + \frac{F}{m} \cdot \nabla_v f = Q(f,f), \quad (x,v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, t > 0. \quad (47)$$

Dans le cas de la force électromagnétique ($F = q(E + v \wedge B)$, q désignant la charge de la particule, $E = E(t,x)$ le champ électrique et $B = B(t,x)$ le champ magnétique), cette équation est fortement non linéaire. En effet, la partie auto-consistante du champ de force est reliée aux grandeurs macroscopiques associées à f par l'intermédiaire des équations de Maxwell. Dans le cas électrostatique ($B = 0$), il faut coupler l'équation de Vlasov avec celle de Poisson comme pour les équations hydrodynamiques présentées précédemment.

Dans l'équation cinétique ci-dessus, le membre de droite $Q(f,f)$ désigne le terme de collision (généralement quadratique relativement à f , ce qui explique la notation qui sera détaillée ultérieurement). Il est donné par un modèle lié à la physique du problème. Ainsi pour les gaz raréfiés, il s'agit de l'opérateur de Boltzmann décrivant des collisions binaires entre particules non nécessairement chargées. Pour les plasmas, l'opérateur couramment utilisé est l'opérateur de Fokker-Planck-Landau (FPL). Il existe autant d'équations de Boltzmann ou de FPL que de potentiels d'interaction entre les particules. Nous renvoyons à [120] pour une taxonomie des opérateurs de collisions. Le cas le plus intéressant physiquement est le cas Coulombien qui correspond à des potentiels dits mous qui décroissent en $1/r^2$. On parle alors d'équations de Vlasov-Boltzmann ou de Vlasov-FPL, selon les cas. Il existe bien entendu d'autres modèles d'opérateurs de collision, comme le modèle B.G.K., le modèle de Lorentz, etc.

La théorie mathématique pour cette équation, dans le cas Boltzmann, est par exemple due à L. Arkeryd [78, 80], R.E. Caflish [90], L. Desvillettes [143], T. Elmroth [97], T. Gustaffson [103] et B. Wennberg [122]. Dans [124], A.A. Arsenev et N.V. Peskov montrent l'existence, pour des intervalles de temps courts, de solutions faibles à l'équation de Fokker-Planck homogène dans le cas Coulombien. En dehors de ce cas, A.A. Arsenev et O.E. Buryak montrent dans [123] l'existence globale en temps de solutions, mais sous des hypothèses fortes sur le noyau et sur

la donnée initiale. Signalons aussi des travaux très récents d'existence de solutions classiques, dans le cas de potentiels durs, établis par L. Desvillettes et C. Villani [146, 147] pour une classe assez large de données initiales. Pour le cas non homogène, des théorèmes d'existence globale ne nécessitant pas d'hypothèses fortes sur les données initiales ont pu être obtenus, grâce à la notion de solution renormalisée introduite par R.Di Perna et P.L. Lions [94] dans le cas Boltzmann. L'extension au cas Fokker-Planck résulte des travaux de P.L. Lions [162] et, plus récemment, de C. Villani [176]. Nous renvoyons à [120] pour une présentation de résultats récents.

La résolution numérique de ce système d'équations repose sur un algorithme de décomposition ou "splitting" : on résout pendant un pas de temps la partie transport i.e. le membre de gauche de (47) puis on calcule pendant un pas de temps l'effet des collisions; si nécessaire, on résout les équations électromagnétiques (Maxwell, Poisson...) et on itère le procédé. L'évaluation numérique des opérateurs de collisions est généralement plus coûteuse que la phase de transport en raison du caractère quadratique de l'opérateur. Les travaux présentés dans cette partie sont consacrés à la résolution de la phase collision ou de façon équivalente du cas homogène (lorsque que f est indépendante de x et que $F = 0$). La convergence d'un tel algorithme a d'ailleurs été obtenue par L. Desvillettes [142] pour l'opérateur de transfert radiatif, et par L. Desvillettes et S. Mischler pour le cas Boltzmann [145].

Il existe plusieurs façons de représenter les fonctions de distribution : les méthodes dites particulières et les méthodes à répartition discrète de vitesse (DVM). Dans le premier cas, la fonction de distribution est approchée par une somme de masses de Dirac de poids $f_i(t)$ et situées dans l'espace des phases en $(X_i(t), V_i(t))$. Dans cette approche, la phase transport est très simple à résoudre car il suffit d'intégrer l'équation des trajectoires des particules sachant la position, la vitesse et la force qui s'applique sur la particule i . Le calcul de la force F_i nécessite de connaître les grandeurs macroscopiques et donc d'intégrer dans l'espace des vitesses pour les particules situées dans la même cellule d'un maillage en espace (méthodes PIC). Dans le second cas, la fonction de distribution est connue par sa valeur en des points d'un maillage de l'espace des phases. La plupart de mes travaux ont été réalisés dans le cadre DVM.

Notons que les équations de Boltzmann homogène ou de Fokker-Planck homogène possèdent des propriétés physiques et mathématiques communes, comme celle de conservation (de la masse, de l'impulsion et de l'énergie) et de (dé)croissance de l'entropie (mathématique). Ces propriétés sont souvent plus faciles à énoncer sur la formulation faible de l'opérateur de collisions : soit ψ une fonction test, on montre que les seuls invariants de collisions

$$\int Q(f, f)(v) \psi(v) dv = 0 \Leftrightarrow \exists a, b, c \psi(v) = a + bv + cv^2,$$

qui correspondent respectivement à la masse, l'impulsion et l'énergie. Le théorème H s'obtient en choisissant $\psi = \log(f)$ dans la formulation faible (de Boltzmann ou de FPL) et on obtient

$$\int Q(f, f)(v) \log(f(v)) dv \leq 0.$$

La fonctionnelle d'entropie $H = \int f \log(f)$ décroît et son minimum correspond aux états d'ETL ou Maxwellienne locale

$$f(t, x, v) = n(t, x) \frac{e^{-|v-u(t,x)|^2/2T(t,x)}}{(2\pi T(t,x))^{3/2}}.$$

Lorsqu'on suppose que le milieu est à l'ETL, on obtient en prenant les 5 premiers moments de l'équation de Vlasov (47) et compte tenu des invariants collisionnels, les équations de l'hydrodynamique (1)-(2)-(5) de la partie I. Il s'agit donc d'une fermeture du système d'équations de moments basée sur l'hypothèse que la fonction de distribution est une Maxwellienne. Pour d'autres échelles de temps, on obtient des modèles de diffusion. La justification de ces passages à la limite a fait l'objet de très nombreuses études [81, 82, 93].

Nous nous sommes attachés à construire des solutions approchées de ces équations préservant ces propriétés qui assurent le retour vers l'ETL, des solutions. Nous allons maintenant présenter les différentes méthodes utilisées et leur analyse numérique. La première section est consacrée à l'opérateur de Boltzmann, la seconde à l'opérateur de FPL dans le cas tridimensionnel (algorithmes rapides et existence de solutions), la troisième à l'opérateur de FPL dans le cas isotrope (schéma log, sans log et méthode de Levermore), la quatrième à l'opérateur de Boltzmann-Lorentz (limite collisions rasantes). Dans la dernière partie, je présente mes axes de recherches (couplage de l'opérateur de collisions à des codes Vlasov, Boltzmann quantique).

1 Régularisation de l'équation de Boltzmann [a3]

En coll. avec C. Buet (C.E.A. Limeil), P. Degond (Toulouse)

De nombreuses méthodes numériques ont été proposées pour résoudre l'équation de Boltzmann et en particulier des méthodes à répartition discrète de vitesse (DVM) (voir [100, 88, 116]). Dans ces méthodes, les vitesses sont sur un maillage fixe de \mathbb{R}^3 . La consistance de ces méthodes est liée à la répartition des solutions entières de l'équation $a^2 + b^2 + c^2 = n$, qui vient de la conservation de l'énergie pour un quaduplet de vitesses sur la grille uniforme. Récemment, des résultats partiels ont été obtenus en utilisant des techniques issues de la théorie des nombres (par exemple [84, 88]).

Du point de vue numérique et pratique, la principale difficulté avec les méthodes DVM est liée au petit nombre de paires de vitesses post-collisionnelles pour un couple de vitesses donné. En effet, le nombre de points d'intersection entre la sphère de collision et le maillage peut être très petit [101]. Dans de telles circonstances, la grille doit être raffinée et le coût devient exorbitant. Pour pallier cette difficulté, nous avons étudié une régularisation de la sphère de collision.

La seconde motivation de ce travail était liée à l'approximation de l'opérateur de Boltzmann par des méthodes particulières [95, 109, 112]. Les méthodes de type Monte Carlo permettent de traiter les phases de transport et de collision de façon naturelle et relativement facile à mettre en oeuvre [83, 110, 111]. Cependant, le calcul par une méthode Monte-Carlo des intégrales de collisions génère un fort bruit numérique. Il serait donc intéressant de trouver une résolution déterministe des intégrales de collisions. Cet objectif a été atteint pour la théorie du transport linéaire [95, 109, 112] mais cela nécessite de trouver une régularisation du processus de collision microscopique afin que l'opérateur soit globalement conservatif.

Présentons brièvement le traitement des collisions par une méthode particulière déterministe. Cela consiste à trouver un système à 4 vitesses pour des vitesses non exactement cosphé-

riques (dans le repère du centre de masse), mais tel que, après intégration sur l'ensemble des quadruplets possibles, l'opérateur soit toujours conservatif en masse, impulsion et énergie.

Dans cet article nous avons étudié deux stratégies possibles. La première consiste à "épaissir" la sphère de collisions et à autoriser les vitesses post-collisionnelles à être situées sur une coquille sphérique. L'opérateur de Boltzmann peut s'écrire sous la forme :

$$Q[f](v) = \int_{(\mathbb{R}^3)^3} c(v, v_1, v', v'_1) (f' f'_1 - f f_1) dv' dv'_1 dv_1, \quad (48)$$

où l'intégration est prise sur l'ensemble des triplets de vitesses et c est défini par

$$c(v, v_1, v', v'_1) = \delta_0(v + v_1 - v' - v'_1) \delta_0(|v - v_1|^2 - |v' - v'_1|^2) C \left(|v - v_1|, \frac{(v - v_1, \Omega)}{|v - v_1|} \right), \quad (49)$$

où $\Omega = \frac{(v' - v'_1) - (v - v_1)}{|(v' - v'_1) - (v - v_1)|}$ et δ_0 représente la mesure de Dirac en $x = 0$. Notons que les fonctions c et C ne sont définies que pour les vitesses v, v_1, v' et v'_1 satisfaisant les propriétés de conservation de l'impulsion et de l'énergie

$$v + v_1 = v' + v'_1, \quad |v|^2 + |v_1|^2 = |v'|^2 + |v'_1|^2. \quad (50)$$

Dans cette formulation, que l'on trouve par exemple dans [92], les conservations (50) sont assurées par les mesures de Dirac et nous avons cherché à régulariser ces mesures de façon à augmenter le nombre de vitesses post-collisionnelles admissibles. L'opérateur régularisé \tilde{Q} est écrit sous forme faible symétrisée pour une fonction test Ψ

$$\begin{aligned} (\tilde{Q}[f], \Psi) &= \frac{-1}{4} \int_{(\mathbb{R}^3)^4} \tilde{C} \left(\frac{v - v_1}{2}, \frac{v' - v'_1}{2} \right) (\Psi' + \Psi'_1 - \Psi - \Psi_1) \\ &\quad \left(f' f'_1 \delta \left(\frac{v + v_1}{2}, \frac{v - v_1}{2}, \frac{v' + v'_1}{2}, \frac{v' - v'_1}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. - f f_1 \delta \left(\frac{v' + v'_1}{2}, \frac{v' - v'_1}{2}, \frac{v + v_1}{2}, \frac{v - v_1}{2} \right) \right) dv dv' dv'_1 dv_1, \end{aligned} \quad (51)$$

avec $\tilde{C}(z, z')$ défini par $C(\overline{|z|}, \frac{|z-z'|}{2\overline{|z|}})$, où $\overline{|z|}$ est une valeur moyenne de $|z|$ et $|z'|$. On obtient d'abord des conditions nécessaires sur la fonction δ pour que les propriétés (conservations, décroissance de l'entropie et états d'équilibre) soient satisfaites. Lorsque seule la condition sur l'énergie est régularisée, on construit un tel opérateur mais lorsque les deux contraintes (impulsion et énergie) sont relaxées, la construction nécessite des conditions sur la fonction de distribution elle-même afin d'assurer que lorsque le paramètre de régularisation tend vers 0, on retrouve l'opérateur de Boltzmann usuel. De plus, la section efficace régularisée dépend de la fonction de distribution ce qui complique la structure de l'opérateur et son implémentation. Rappelons que les propriétés requises sont indispensables pour garantir le retour vers la Maxwellienne d'équilibre en temps grand.

La seconde approche consiste à "modifier les masses" lors du processus de collisions tout en préservant les propriétés macroscopiques. Précisons la démarche. Pour un couple v, v_1 de vitesses, on définit un centre de masse approché par

$$V(x) = xv + (1 - x)v_1,$$

et les vitesses post-collisionnelles

$$v' = V(x) + (1 - y)r\omega, \quad v'_1 = V(x) - yr\omega, \quad (52)$$

où x et y sont deux réels proches de $1/2$. La conservation de l'énergie permet de déterminer r en fonction de x, y, v et v_1 . On définit une suite régularisante $h_\varepsilon(x - 1/2) = \xi((x - 1/2)/\varepsilon)/\varepsilon$, avec ξ une fonction paire, positive, régulière telle que $\int_{z \in \mathcal{I}} \xi(z - 1/2) dz = 1$ et pour tout $\varepsilon > 0$ et toute fonction f , on pose

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_\varepsilon(f, f) = & \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} \int_{(x, y) \in \mathcal{I}^2} q\left(\frac{|v - v_1| + |v' - v'_1|}{2}, \omega\right) \chi\left(\frac{f}{M}, \frac{f_1}{M_1}, \frac{f'}{M'}, \frac{f'_1}{M'_1}, x, y\right) \\ & \left(\frac{M_1 M f' f'_1 - M'_1 M' f f_1}{\sqrt{M_1 M M'_1 M'}}\right) h_\varepsilon\left(x - \frac{1}{2}\right) h_\varepsilon\left(y - \frac{1}{2}\right) dv_1 d\omega p(x) dx dy, \end{aligned}$$

où (v', v'_1) est calculé à partir de (v, v_1, ω, x, y) à partir des relations (52) et $q(u, \omega) = u\sigma(u, \omega)$ et σ est la section efficace différentielle de collision, $M = M^f$ est la Maxwellienne d'équilibre associée à f , χ est une fonction permettant d'assurer la décroissance de l'entropie et $p(x) = 64x(x - x^2)^{1.5}$ la microréversibilité de l'opérateur. On montre formellement la convergence de cet opérateur régularisé vers l'opérateur de Boltzmann

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{C}_\varepsilon(f, f) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} (f' f'_1 - f f_1) q(|v - v_1|, \omega) dv_1 d\omega. \quad (53)$$

Nous vérifions qu'il satisfait les lois de conservations et la décroissance de l'entropie. Il est immédiat d'après la définition de \mathcal{C}_ε que les Maxwelliennes sont des états d'équilibres. L'implication inverse n'est pas claire mais nous montrons comment modifier cet opérateur pour éliminer les éventuels invariants non physiques. L'intérêt de cette méthode par rapport à la précédente est que la modification de la section efficace de collision ne dépend que de la Maxwellienne d'équilibre et non de la fonction de distribution.

Cette étude a fait l'objet de deux développements numériques non publiés.

D'une part, nous avons travaillé sur l'extension de la méthode DVM développée par C. Buet pour l'équation de Boltzmann [88] aux cas multi-espèces (particules de masses différentes). Il s'agit d'une idée inverse de celle présentée où l'on modifie les masses réelles (qui sont égales) de façon à augmenter le nombre de quadruplets admissibles. Dans ce cas, on s'intéresse à un mélange d'atomes de masses différentes (typiquement de l'azote N_2 et de l'oxygène O_2 , dont le rapport des masses est proche de $7/8$) et on modifie l'opérateur de collision de façon à traiter les collisions inter-espèces comme si les particules avaient la même masse tout en assurant les propriétés de conservation avec les masses réelles des espèces. En effet, avec le rapport des masses réel, le nombre de points du maillage vérifiant l'équivalent des relations (50) dans le cas multi-espèces est très faible (voir [100]).

D'autre part, avec A. Ambroso, nous avons implémenté une méthode particulière originale (conservative et entropique) pour l'équation de Boltzmann homogène [r1]. Il s'agit d'une variante des idées exposées plus haut. Le problème des méthodes particulières pour Boltzmann est que la probabilité de trouver un quadruplet de vitesses cosphériques est nulle. Une nouvelle approche appelée RDVM (Random Discrete Velocities Methods) consiste à créer des particules fictives (de masse nulle) [105], [106]. Cette méthode multiplie le nombre de particules par deux à chaque pas de temps et il faut donc régulièrement "regrouper" certaines particules proches, en utilisant une grille. Cette étape de projection conduit à une augmentation de l'entropie. Afin de ne pas créer de nouvelles particules, nous avons adopté la stratégie suivante : on se donne un maillage de l'espace des vitesses. On choisit un quadruplet de vitesses quasi-cosphériques en tirant un couple de vitesses post-collisionnelles (fictives) et en choisissant des particules dans les mêmes cellules. Ces quatre vitesses sont projetées sur la variété des quadruplets cosphériques tout en préservant l'impulsion (de chaque couple) et l'énergie. Plus précisément, ces conditions conduisent au système d'équations suivant où $U \in \mathbb{R}^{12}$ est l'inconnue et $V = (v, v_1, v', v'_1) \in \mathbb{R}^{12}$ la donnée :

$$\begin{aligned} (u + u_1) &= (u' + u'_1) (\mathbb{R}^3), \quad |u|^2 + |u_1|^2 = |u'|^2 + |u'_1|^2, \\ fu + f_1u_1 &= fv + f_1v_1 (\mathbb{R}^3), \quad f'u' + f'_1u'_1 = f'v' + f'_1v'_1, (\mathbb{R}^3) \\ f|u|^2 + f_1|u_1|^2 &+ f'|u'|^2 + f'_1|u'_1|^2 = f|v|^2 + f_1|v_1|^2 + f'|v'|^2 + f'_1|v'_1|^2. \end{aligned}$$

où f, f_1, f' et f'_1 sont les poids des particules de vitesses v, v_1, v', v'_1 respectivement. Ce système de 11 équations à 12 inconnues possède une variété compacte de dimension 1 de solutions dès que $f \neq f_1$ et $f' \neq f'_1$. On choisit U en minimisant la distance $|V - U|^2$. Lorsque les vitesses U sont dans les mêmes mailles que celles de V , on effectue la collision i.e. on résout le système à 4 vitesses sur les poids des particules ce qui diminue l'entropie. On renvoie à [r1] pour plus de détails et quelques tests numériques.

2 Fokker-Planck-Landau.

Avant de présenter mes travaux sur l'analyse numérique de l'opérateur de Fokker-Planck-Landau, nous allons en rappeler quelques propriétés.

La dérivation statistique de **l'opérateur de Fokker-Planck** que l'on trouve par exemple dans le chapitre 6 de [184], repose sur le fait que les grandes déviations subies par une particule résultent essentiellement d'une succession de "collisions rasantes" i.e. de faibles déviations (voir section 4 pour la justification de cette limite pour un opérateur simplifié).

Citons les travaux de Lucquin, Degond et Desvillettes sur la justification de cette limite [141, 135]. Dans [135], on montre que, moyennant une adimensionnalisation convenable de l'opérateur de Boltzmann (dans le cas d'une loi d'attraction Coulombienne), il est possible de mettre en évidence un petit paramètre physique, appelé **paramètre plasma**. Nous constatons ensuite que le premier terme du développement asymptotique de cet opérateur de collision en fonction du petit paramètre est précisément l'opérateur de Fokker-Planck (voir la section 4 pour une étude similaire dans le cas de l'opérateur de Lorentz).

Il existe une autre dérivation à partir de Vlasov-Poisson due à Balescu [126] et indépendamment à Lénard [160]. Celle-ci est moins bien comprise mathématiquement. Nous renvoyons au chapitre 11 de [184] pour une telle présentation.

L'opérateur de Fokker-Planck, que nous noterons de manière spécifique $Q^{FP}(f,f)$, s'écrit dans le cas général

$$Q^{FP}(f,f)(v) = \nabla_v \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^3} \Phi(v - v_1) (\nabla_v f f_1 - \nabla_{v_1} f f) dv_1 \right),$$

où, pour simplifier les notations, la variable t est omise, et : $f = f(v)$, $f_1 = f(v_1)$, $\nabla_v f = (\nabla f)(v)$, $\nabla_{v_1} f = (\nabla f)(v_1)$. Pour tout $w \in \mathbb{R}^3$, le potentiel $\Phi(w) = \Phi(-w)$ est une matrice carrée d'ordre trois symétrique et semi-définie positive qui s'écrit

$$\Phi(w) = (\mathcal{B}S)(w), \quad S(w) = Id - \frac{w \otimes w}{|w|^2},$$

Id désignant la matrice identité dans \mathbb{R}^3 . Le noyau \mathcal{B} qui apparaît dans cet opérateur est le produit de $|v|^3$ par la section efficace différentielle de collision, quantité statistique qui est elle-même étroitement liée au potentiel d'interaction entre les particules. Plus précisément, si la force d'interaction est de la forme r^{-s} , avec $s \geq 2$ (r désigne la distance entre deux particules), le noyau s'écrit $\mathcal{B}(v) = C|v|^{\gamma+2}$, où $\gamma = \frac{s-5}{s-1}$, et C est une constante positive. On appelle potentiels durs les potentiels pour lesquels $\gamma > 0$, et potentiels mous ceux pour lesquels $\gamma < 0$. Enfin le cas particulier $\gamma = 0$ correspond aux molécules maxwelliennes. De cette distinction résultent des propriétés mathématiques, qui sont en général beaucoup plus difficiles à obtenir dans le cas de potentiels mous. Le cas Coulombien correspond à $s = 2$, soit $\gamma = -3$.

Nous avons écrit l'opérateur de Fokker-Planck sous une forme conservative, parfois appelée forme de Landau ; c'est une forme très agréable d'un point de vue mathématique. On rencontrera aussi dans la littérature physique une autre écriture de cet opérateur, appelée forme de Rosenbluth : en développant la forme de Landau précédente, l'opérateur de Fokker-Planck apparaît comme une combinaison (non linéaire) entre un opérateur de diffusion et un opérateur de friction ; les coefficients de cette combinaison s'appellent potentiels de Rosenbluth.

Si toutes les formes de l'opérateur sont équivalentes au niveau continu, une fois discrétisée, il n'en est pas de même. Des schémas de différences finies conservatifs ont été décrits antérieurement, soit dans le cas totalement isotrope (la fonction de distribution ne dépend de la vitesse que par l'intermédiaire de son module) dans [127, 128], soit dans le cas d'une géométrie à symétrie azimuthale (i.e. en variables sphériques, la fonction de distribution est supposée indépendante de l'angle azimuthal) par différents auteurs [170, 171, 177]. La conservation des invariants collisionnels y est en général assurée, la décroissance de l'entropie parfois établie. Mais nulle part n'est vérifié le fait que les seuls invariants collisionnels soient les invariants "physiquement acceptables", à savoir la masse, la quantité de mouvement et l'énergie. Concernant les simulations numériques effectives de l'équation de Fokker-Planck, les premières remontent à 1957 pour le cas isotrope, [173] (voir aussi la section 3) et 1987 pour le cas axisymétrique [154]. Plus récemment, O. Larroche implémente dans [156] un schéma volumes finis qui ne préserve que la masse. Ce schéma est ensuite amélioré, selon une méthode de correction inspirée de [125], de manière à ce qu'il conserve aussi l'impulsion et l'énergie [134].

Citons pour conclure les travaux de Lucquin, Degond [136, 137], Epperlein [148] (isotrope), Frenod-Lucquin (axisymétrique [152]) et Lemou [158, 159], G. Russo et L. Pareschi (méthodes spectrales [167]) et aussi ceux de Dellacherie [132] pour les plasmas électrons-ions et les résultats de convergence de Shaeffer [174] pour FP linéaire.

Les travaux que je vais présenter maintenant portent sur la formulation "Landau" de l'opérateur: la première section est consacrée aux algorithmes rapides (multigrilles et sousréseaux), la seconde à l'existence de solutions du problème semi-discret et discret.

2.1 Algorithmes rapides [a2].

En coll. avec C. Buet (C.E.A. Limeil), P. Degond et M. Lemou (M.I.P., Toulouse).

Nous avons mis au point des algorithmes rapides (de type multigrille et sous réseaux) pour résoudre l'équation de Fokker Planck à partir d'une discrétisation de cet opérateur proposée par P. Degond et B. Lucquin [164, 136]. Ceci permet de réduire le coût a priori quadratique de telles simulations numériques à un coût d'ordre $N \ln(N)$ et donc d'envisager de simuler des phénomènes beaucoup plus complexes. Les premiers résultats numériques sont très encourageants (le temps calcul pour une itération en temps est passé de plus de 3 heures sur CRAY T3E au CEA à 3 secondes sur stations de travail ordinaires qui sont certes de plus en plus rapides!). Ce travail fait l'objet d'une publication parue dans Journal of Computational Physics [a2].

Plus précisément, nous avons travaillé sur la formulation dite Landau-Log de l'opérateur. Un schéma d'approximation par différences finies de l'équation de Fokker-Planck homogène préservant au niveau discret toutes les propriétés physiques (conservations de la masse, l'impulsion et l'énergie, décroissance de l'entropie et états d'équilibre Maxwelliens et uniquement ceux là!) a été proposé par P. Degond et B. Lucquin dans [164, 136]. Rappelons en la structure. Étant donné un maillage uniforme $v_i = i\Delta v$, $i = (i^1, i^2, i^3) \in \mathbb{Z}^3$ de \mathbb{R}^3 , on définit une approximation de f en résolvant le système

$$\text{pour tout } i \in \mathbb{Z}^3, \quad \frac{df_i}{dt} = FPL_i, \quad f_i(0) = f_0(v_i), \quad (54)$$

où $FPL_i \simeq Q^{FP}(f, f)(v_i)$ est défini par :

$$FPL_i = -D^* \cdot \left[\sum_{j \in \mathbb{Z}^3} \phi(v_i - v_j) f_i f_j (D \log f_i - D \log f_j) \Delta v^3 \right].$$

Dans cette expression, D est un opérateur de différences finies, défini de manière uniforme sur tout le maillage, et approchant l'opérateur gradient au moins à l'ordre 1 et D^* est l'opérateur discret adjoint. On peut l'écrire sous forme faible :

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}^3} FPL_i \psi_i = \frac{-\Delta v^3}{2} \sum_{(i,j) \in \mathbb{Z}^6} f_i f_j ((D\psi)_i - (D\psi)_j)^T \Phi(v_i - v_j) ((D \ln f)_i - (D \ln f)_j). \quad (55)$$

Il est clair sur la formule (55) que le coût de cet opérateur sera quadratique. Nous rappelons comment se ramener à un domaine borné de l'espace des vitesses en suivant les idées de [136]. Puis, nous expliquons comment cette discrétisation peut être étendue de façon immédiate au cas multi-espèces. Rappelons que cette extension, indispensable pour traiter les cas physiquement intéressants est un obstacle majeur lorsqu'on utilise une discrétisation basée sur la formulation de Rosenbluth [156].

Choix de l'opérateur de différence finies.

Il a été montré dans [135] que pour l'opérateur obtenu avec le schéma différence fini décentré (avec $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$)

$$(D_s \psi)_i = \varepsilon_i \frac{\psi_{i+\varepsilon_i e_s} - \psi_i}{\Delta v}, \quad s = 1, 2, 3, \quad (56)$$

les seuls invariants de collisions sont les combinaisons linéaires de 1, v et v^2 (correspondant respectivement à la masse, l'impulsion et l'énergie). Avec le schéma centré,

$$(D_c^s \psi)_i = \frac{\psi_{i+e_s} - \psi_{i-e_s}}{2\Delta v}, \quad \Delta = 1, 2, 3, \quad (57)$$

l'opérateur possède des invariants supplémentaires associés à des états d'équilibre parasites. En revanche, les schémas décentrés ne sont que d'ordre 1 et ils introduisent une dissymétrie artificielle dans la discrétisation. Nous avons montré qu'il était possible d'éliminer les invariants parasites tout en conservant la symétrie de l'opérateur en prenant la moyenne arithmétique des opérateurs obtenus pour chacun des 8 choix (2 possibilités pour 3 dimensions) possibles de direction pour les opérateurs décentrés. L'opérateur obtenu s'écrit comme celui obtenu avec le schéma centré avec une correction d'ordre 2 qui élimine les invariants parasites du schéma (57).

Sur les six figures qui ont été réalisées avec l'une des toutes premières versions du code en 1995, on constate ces invariants parasites (les "rayures" lorsqu'on s'approche de l'équilibre). Ces figures illustrent l'effet de l'opérateur (formulation log 2D, coût quadratique, opérateur centré, grille 60 par 60) sur une condition initiale (fantaisiste) caractéristique de Fokker-Planck (1 pour les points noirs, 0.01 pour les rouges). On observe une diffusion comparable à celle qu'aurait un opérateur de la chaleur.

Réduction du coût calcul : sous-réseaux.

La première méthode que nous avons considérée est inspirée des travaux de C. Buet pour l'opérateur de Boltzmann. Cette méthode appelée méthode des sous réseaux consiste à ne retenir dans la somme double que les indices i et j telles que le vecteur $(i - j)$ soit un multiple de a . Nous montrons que l'opérateur $(Q_i[a] + Q_i[b])/2$ avec a et b premiers entre eux possède les mêmes propriétés que Q , en particulier, les seuls invariants sont les invariants physiques. Le coût de l'évaluation est multiplié par $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3}$. Par exemple, avec $a = 7$ et $b = 8$, il est divisé par environ 25.

Méthodes multigrilles.

On découpe le domaine cubique unité de calcul $C_0 = [0,1]^3$ (le "père") d'arête 1 en 8 cubes réguliers C_1^r (les "enfants") d'arête 1/2 et de centre

$$O_1^r = \left(\frac{1}{2^2} + \frac{r_1}{2}, \frac{1}{2^2} + \frac{r_2}{2}, \frac{1}{2^2} + \frac{r_3}{2} \right), \quad (58)$$

avec $r = (r_1, r_2, r_3) \in I_1 \stackrel{def}{=} \{0,1\}^3$. On écrit ensuite la somme (ou l'intégrale) double

$$\int_{C_0} Q(f,f)(v)\psi(v)dv = \sum_{(r,r') \in I_1^2} \int_{C_1^{r'} \times C_1^r} H(v,w)dv dw. \quad (59)$$

On itère le procédé en divisant à nouveau chaque sous-cube en 8 cubes d'arêtes de longueur $1/4$ etc... jusqu'à un niveau K . On définit ensuite la notion de cubes de niveau $k \in \{2 \dots K\}$ - i.e. d'arêtes de longueur 2^{-k} bien séparés. On dit que deux cubes de niveau k sont bien séparés s'ils ne sont pas voisins (pas de faces ou de sommets communs) mais que leurs "parents" le sont. On obtient ainsi une partition de $C_0 \times C_0$ en prenant la réunion des sous-cubes bien séparés de niveau k variant de 2 à K et des sous-cubes voisins au niveau le plus fin K . On utilise ensuite une méthode aléatoire de type Monte-Carlo d'autant plus précise que le niveau est grand (exacte au niveau K) pour évaluer la contribution entre deux sous-cubes. Cette méthode est bien adaptée au cas Coulombien pour lequel la section efficace décroît avec la vitesse relative de sorte que la contribution entre les sous-cubes des premiers niveaux est moins importante que celle des niveaux élevés. Le coût d'un tel algorithme est $N \ln(N)$ avec $N = 2^{3K}$ le nombre de points de discrétisation.

Une autre méthode a été étudiée par M. Lemou dans [158]: il s'agit d'une méthode de type multipolaire. On conserve la décomposition en niveaux et la hiérarchie multigrille mais on remplace le calcul Monte-Carlo par un développement multipolaire tronqué. Il s'agit d'une approximation (à cause de la troncature) qui est exacte dans le cas maxwellien. La complexité de l'algorithme est comparable. Ces algorithmes rapides (sous-réseaux, multigrilles et multipolaires) ont été adaptés au cas axisymétrique par M. Lemou [159].

Récemment, un autre type de méthode, dite spectrale, a été proposé par G. Russo et L. Pareschi [167]. Celle-ci est également en $N \ln N$ grâce à l'utilisation de la transformée de Fourier rapide. De plus, il est possible d'en contrôler la précision. En revanche, le seul invariant est la masse et la fonction de distribution tend vers une valeur constante en temps grand. Un projet que j'ai encadré dans le cadre du CEMRACS 1999 a porté sur la comparaison de ces différents algorithmes rapides (multigrille, multipolaire et spectral) par P. Bechouche et F. Filbet. Ce travail est en cours.

2.2 Existence de solutions et propriétés des schémas [a6]

En coll. avec C. Buet, article paru dans SIAM Journal of Numerical Analysis [a6].

Nous avons montré l'existence de solutions pour le système d'équations différentielles non linéaires couplées correspondant à l'opérateur de Fokker-Planck discrétisé dans l'espace des vitesses. Nous montrons également que le problème peut être discrétisé explicitement en temps moyennant une condition sur le pas de temps de type CFL.

Rappelons que les algorithmes basés sur la formulation dite Landau-log de l'opérateur de Fokker-Planck permettent de (ne) vérifier (que) les propriétés physiques (conservation, entropie et états d'équilibre). Ces propriétés sont indispensables pour éviter un chauffage ou un refroidissement artificiel de la fonction de distribution, comme cela a été noté pour l'équation de

Boltzmann [104]. En d'autres termes, la décroissance de l'entropie est importante pour assurer la thermalisation du plasma et les conservations pour qu'elle se fasse vers l'ETL (équilibre thermodynamique local). De plus, comme nous l'avons montré dans [a2], il est possible de généraliser ces schémas au cas multi-espèces.

Numériquement, nous avons observé dans cet article que la décroissance de l'entropie et la positivité de la fonction de distribution généraient des solutions sans oscillation. Cette propriété de type principe du maximum est démontrée dans le cas de FPL linéaire. Dans le cas isotrope (section suivante et [a5]), nous avons montré sur des exemples numériques l'existence de telles oscillations dans le cas non linéaire.

Comme nous l'avons rappelé, ces propriétés de conservation et d'entropie pour les schémas FPL sont satisfaites en utilisant la formulation dite Landau-log qui a fait l'objet de nombreux travaux [136, 127, 171, 128, 164, 152, 170]. Dans ce papier, nous montrons que le schéma basé sur la formulation "sans"-log est bien conservatif mais qu'il existe des fonctions de distribution initiales positives qui conduisent à une solution négative après un temps arbitrairement petit.

Les résultats principaux de ce travail sont l'existence de solutions positives pour le système d'équations différentielles ordinaires correspondant au problème semi-discrétisé (55) i.e. uniquement en vitesses et la vérification de la décroissance de l'entropie pour le schéma totalement discrétisé (i.e. en temps et en vitesse, avec un schéma explicite). En effet, les travaux cités précédemment vérifient que l'entropie de la solution du problème semi-discrétisé décroît mais pas celle du problème discrétisé en temps qui est effectivement implémenté dans les codes de calcul. Nous montrons que ces propriétés sont bien vérifiées pour une variante du schéma exposé auparavant.

On considère dans un premier temps l'équation de FPL linéaire (en dimension d) qui décrit l'effet sur les électrons des collisions électrons-ions et que l'on peut écrire sous la forme

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \nabla \cdot (T f \vec{\nabla}_v \log(f/M_f)), \quad (60)$$

On discrétise cette formulation par

$$\frac{df_i}{dt} = FP_i^L = (D^* \cdot p)_i, \quad p_i^s = g_i^s (D^s \log(f/M))_i, \quad (61)$$

où M est la maxwellienne discrète centrée de même masse et température que f et (D, D^*) sont des opérateurs de différences finis adjoints. Les coefficients g_i^s sont des approximations de f_i définis par

$$g_i^s = \frac{(\sharp N^s) \prod_{k \in N^s} f_{i+k}}{\sum_{k' \in N^s} \left(\prod_{k \in N^s - \{k'\}} f_{i+k} \right)}, \quad i \in \mathbb{Z}^d, \quad (62)$$

où N^s est l'ensemble des points pris en compte pour calculer l'opérateur de différences finis dans la direction s et $(\sharp N)$ est son cardinal. Le schéma obtenu peut s'interpréter comme un schéma de type volumes finis : en intégrant sur une maille C_i cubique centrée en v_i , avec formule de quadrature au point milieu, on obtient une formulation équivalente à (61)

$$\frac{df_i}{dt} = FP_i^L = \frac{1}{\Delta v^2} \sum_{\mu \in \{-1, 1\}} \sum_{s=1 \dots d} g_{i, i+\mu e_s} \left(\log \left(\frac{f_{i+\mu e_s}}{M_{i+\mu e_s}} \right) - \log \left(\frac{f_i}{M_i} \right) \right), \quad (63)$$

en utilisant une approximation bien connue dans le cas des équations de diffusion [150] qui consiste à prendre la moyenne harmonique

$$g_{i,i+\mu e_s} = \frac{2f_i f_{i+\mu e_s}}{f_i + f_{i+\mu e_s}} \approx f \left(v = \frac{v_i + v_{i+\mu e_s}}{2} \right),$$

qui garantit la continuité des flux aux interfaces. On montre ensuite comment se ramener à un domaine borné I dans l'espace des vitesses et également que le problème de Cauchy est bien posé: soit $(f_i^0) \in \mathbb{R}^{\sharp I}$ avec $f_i^0 > 0$ pour tout $i \in I$; le système (61) avec $f_i(t=0) = f_i^0$ possède une solution positive, entropique, globale en temps telle que $\forall i \in I, \lim_{t \rightarrow \infty} f_i(t) = M_i$. On montre qu'il existe une constante $C > 0$ - dépendant de la donnée initiale - telle que pour des pas de temps de la forme $C/\Delta v^2$ la solution discrète en temps est positive, entropique et converge vers la Maxwellienne discrète en temps grand.

Dans le cas non linéaire, en utilisant l'approximation des f_i par les moyennes harmoniques généralisées g_i^s et en étudiant l'évolution de

$$K \stackrel{def}{=} \sup_{i \in I, k \in N} \left| \frac{f_i}{f_{i+k}} \right|, \quad (64)$$

on montre qu'il existe une solution entropique et positive pour des temps arbitrairement grands au problème de Cauchy analogue à (61) avec FPL défini cette fois par (54) où le produit $f_i f_j$ est remplacé par $g_i g_j$ défini par (62). Dans le cas linéaire, la fonction K est bornée; dans le cas non linéaire, elle est bornée en temps fini. En particulier, la fonction de distribution pourrait s'annuler en quelques points (nécessairement multiples) lorsque $t \rightarrow \infty$ et le problème de la convergence vers l'ETL pour le problème semi-discret reste ouvert.

De façon analogue, pour le problème discrétisé en temps, on n'a pas une borne supérieure du pas de temps qui assure la décroissance de l'entropie et la positivité mais une suite de pas de temps dont la série diverge. On sait donc qu'il existe une solution pour le problème semi-discret et discrétisé en temps (avec la modification de f en g) qui est positive, entropique et globale en temps mais on ne peut montrer le retour vers l'ETL. En pratique, les pas de temps restent bornés inférieurement et la solution s'approche de la Maxwellienne discrète. Les pas de temps entropiques sont donnés par la condition

$$\Delta t_H \stackrel{def}{=} \frac{-\sum_{i \in I} FP_i \log(f_i)}{\sum_{i \in I} FP_i^2 / f_i}.$$

3 Fokker-Planck-Landau isotrope.

Nous avons également travaillé sur un modèle simplifié (symétrie sphérique des fonctions de distribution) pour lequel les résultats du cas tri-dimensionnel peuvent être améliorés [a5].

L'opérateur de Fokker-Planck-Landau peut s'écrire sous une forme simplifiée pour des fonctions de distribution possédant des propriétés de symétrie. En particulier, lorsque la fonction de distribution a un axe de révolution, ce qui est le cas en présence de champ magnétique par exemple; ce cas appelé cas axisymétrique a fait l'objet de travaux récents de Frenod-Lucquin

[152] et Lemou [159]. Lorsque la fonction de distribution possède un centre de symétrie, c'est à dire quand la fonction est indépendante de la direction de la vitesse, on obtient le modèle isotrope considéré ici. L'opérateur satisfait alors les mêmes symétries et la solution reste donc symétrique. L'opérateur de FPL dans le cas isotrope est utilisé pour la modélisation des phénomènes de fusion par confinement inertiel (FCI). Plus précisément, il s'agit de décrire précisément le transport d'énergie dans un plasma produit par un laser. Dans certaines conditions, il est admis que la théorie du transport fluide (dans lequel on ferme les équations hydrodynamiques par une loi pour le flux de chaleur, voir Spitzer-Harm [191]) n'est pas valable. L'opérateur de FPL isotrope peut également être considéré comme le premier terme du développement de FPL en harmonique sphérique (modèles SHE). Nous renvoyons à [148, 149] pour une présentation des modèles physiques et des méthodes numériques pour les résoudre. Outre l'intérêt intrinsèque de l'opérateur isotrope, que l'on rencontre également en astrophysique [130, 131], celui-ci sert à calculer des solutions de références dans le cas Coulombien [172, 173] pour lequel il n'existe pas de solutions exactes contrairement au cas Maxwellien [157].

Au niveau numérique, un schéma conservatif et entropique a été proposé dans le cas isotrope [127]. Les auteurs donnent des conditions sur les pas de temps pour assurer la décroissance de l'entropie sans justifier ces propriétés. Comme on l'a déjà dit, la décroissance de l'entropie est importante pour assurer le retour vers l'équilibre mais aussi pour empêcher la formation d'oscillations parasites. Celles-ci sont particulièrement visibles sur une fonctionnelle appelée information de Fischer. Les solutions discrètes doivent également rester positives et cela n'apparaît pas dans [127]. Rappelons qu'un schéma peut être conservatif et ne pas préserver la positivité, comme on l'a vu avec le schéma sans log dans le cas tridimensionnel. Il est annoncé dans [127] que dans le cas isotrope, les propriétés (conservation, entropie) sont satisfaites sur la forme sans log. Nous en donnons la preuve moyennant une modification utilisant les moyennes entropiques. Ceci nous permet également de montrer que la solution discrète tend en temps grand vers l'ETL.

Les trois sections suivantes décrivent les résultats obtenus : la première est une adaptation et une amélioration des résultats obtenus dans le cas tridimensionnel (section 2.2) pour le schéma basé sur la formulation log; la deuxième est basée sur autre formulation, sans log, pour laquelle on vérifie les propriétés de conservation, entropie et états d'équilibre et qui permet de proposer de nouveaux schémas en temps; la troisième est consacrée à une méthode de fermeture de moments, proposée par D. Levermore, qui conduit à des résultats très proches de ceux de l'opérateur de collisions.

3.1 Existence de solutions pour FPL log [a5]

Nous nous intéressons à l'opérateur de FPL pour les fonctions de distribution isotropes i.e. qui ne dépendent que de la variable d'énergie ε et du temps $f(\varepsilon, t)$. On ne note pas la dépendance en temps pour simplifier. Cet opérateur s'écrit (voir [127]) une fois ramené à un domaine borné en énergie et adimensionné, dans le cas Coulombien

$$\frac{\partial f(\varepsilon)}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{d}{d\varepsilon} \int_0^{\varepsilon_0} f(\varepsilon) f(\varepsilon') \left(\frac{d}{d\varepsilon} \ln f(\varepsilon) - \frac{d}{d\varepsilon} \ln f(\varepsilon') \right) k(\varepsilon, \varepsilon') d\varepsilon', \quad (65)$$

avec $k(\varepsilon, \varepsilon') = \inf(\varepsilon^{3/2}, (\varepsilon')^{3/2})$ et ε_0 assez grand pour que la fonction f soit bien représentée. On considère une forme faible de cet opérateur

$$\int_0^{\varepsilon_0} \frac{\partial f}{\partial t} \phi \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon = -\frac{1}{2} \int_0^{\varepsilon_0} \int_0^{\varepsilon_0} f(\varepsilon) f(\varepsilon') \left(\frac{\partial \phi(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial \phi(\varepsilon')}{\partial \varepsilon'} \right) \left(\frac{\partial \ln f(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial \ln f(\varepsilon')}{\partial \varepsilon'} \right) k(\varepsilon, \varepsilon') d\varepsilon' d\varepsilon, \quad (66)$$

qui vérifie les conservations de la masse (resp. l'énergie) en prenant $\phi = 1$ (resp. $\phi = \varepsilon$) dans (66). L'entropie définie par

$$H = \int_0^{\varepsilon_0} f(\varepsilon) \ln(f(\varepsilon)) \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon, \quad (67)$$

décroît en temps (prendre $\phi = \ln(f)$ dans la formulation faible) et on a le théorème H . Les états d'équilibre sont de la forme

$$\partial_t H = 0 \Leftrightarrow f(\varepsilon) = \exp(-A\varepsilon + B).$$

Le problème est plus simple que dans le cas tridimensionnel. Nous montrons d'abord l'existence d'une unique solution, globale en temps pour le problème semi-discret qui est décrit dans la section suivante. Ce résultat est obtenu en considérant à nouveau une moyenne harmonique comme dans le cas tridimensionnel (62). Ensuite, pour le problème discretisé en temps, nous obtenons une borne sur les pas de temps pour assurer la positivité et la décroissance de l'entropie.

En outre, nous montrons que l'évaluation de cet opérateur peut-être réalisée avec un coût proportionnel au nombre de points de maillage malgré le caractère quadratique de l'opérateur. Nous expliquons également qu'il est possible dans ce cas (isotrope) de considérer un maillage arbitraire alors que les travaux précédents dans le cas 3D [a2, a6, 158] nécessitent un maillage uniforme. Ceci permet de raffiner le maillage pour les faibles énergies et donc d'obtenir des solutions très précises. On montre également sur quelques tests numériques que si la condition sur le pas de temps pour rester entropique est relaxée, des oscillations apparaissent sur la fonction. Ces oscillations sont particulièrement visibles sur la fonctionnelle de Linnick ou information de Fischer

$$L(t) = \int_{\varepsilon \geq 0} \left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right)^2 \frac{\varepsilon^{3/2}}{f} d\varepsilon, \quad (68)$$

dont on ne sait pas montrer si elle est monotone sauf dans le cas linéaire [175]. Quelques questions restent ouvertes comme le comportement en temps grand de la solution à la fois pour le problème semi-discrétisé et discretisé en temps, bien qu'on observe le retour vers l'ETL de la solution.

3.2 Forme sans log et schémas en temps [s2]

Dans cette partie, nous nous intéressons à nouveau aux opérateurs de FPL dans le cas isotrope. Nous considérons une autre moyenne que la moyenne harmonique, la moyenne dite "entropique" :

$$g_{i,j} \stackrel{def}{=} \frac{f_i Df_j - f_j Df_i}{D(\ln f)_j - D(\ln f)_i}, \quad (69)$$

si $D(\ln f)_j \neq D(\ln f)_i$ et $f_i f_j$ sinon (mais les termes correspondants ont une contribution nulle à l'opérateur de collisions). Cette expression est une approximation d'ordre 1 du produit $f_i f_j$ sauf pour une grille uniforme où elle est d'ordre 2. Cette moyenne a également été utilisée dans [129]. Pour un tel choix, l'opérateur semi-discrétisé qui s'écrivait :

$$\sum_{i=1}^N c_i \frac{\partial f_i}{\partial t} \phi_i = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} g_{i,j} k_{i,j} \Delta \varepsilon_i \Delta \varepsilon_j (D\phi_i - D\phi_j) (D(\ln f)_i - D(\ln f)_j), \quad (70)$$

devient

$$\sum_{i=1}^N c_i \frac{\partial f_i}{\partial t} \phi_i = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} k_{i,j} \Delta \varepsilon_i \Delta \varepsilon_j (D\phi_i - D\phi_j) (f_j Df_i - f_i Df_j).$$

On a donc dans ce cas une façon de passer de la formulation discrète avec "log" (qui permet de montrer la décroissance de l'entropie) à la formulation sans log qui a une structure quadratique. Ceci n'est valable que pour un maillage uniforme en énergie et n'est pas généralisable facilement au cas tridimensionnel. Nous montrons l'existence d'une solution strictement positive en utilisant la décomposition de l'opérateur en terme de perte et de gain qui est classique pour l'opérateur de Boltzmann. Nous en déduisons une borne inférieure en utilisant l'inégalité de Csizar-Kullback

$$\|f - M\|_{L^1}^2 \leq 2H(f\|M),$$

où $H(f\|M)$ est l'entropie relative discrète. Ceci nous permet de conclure que $f(t)$ tend vers l'ETL pour une suite de temps t tendant vers $+\infty$. Il s'agit du premier exemple à notre connaissance de discrétisation de l'opérateur de FPL pour lequel on sache montrer cette propriété.

Nous nous intéressons ensuite à la discrétisation en temps de ces opérateurs. On considère dans un premier temps un schéma explicite basé sur la structure quadratique de l'opérateur. En effet, l'opérateur défini par (70) peut s'écrire comme une somme de systèmes à quatre vitesses généralisés [e2]. Nous obtenons une limitation sur le pas de temps pour que le schéma soit positif et entropique qui dépend de la norme sup de la solution (pour laquelle il n'existe pas d'estimations).

Nous étudions ensuite des schémas d'ordre supérieur en temps pour lesquels le schéma explicite fournit une phase de prédiction qui est corrigée. Ces schémas vérifient également la positivité et la décroissance de l'entropie. Nous présentons également une méthode implicite qui est inspirée de [148]. Cette méthode permet de choisir des pas de temps arbitrairement grands. Mais, en terme de coût, cette approche ne devient performante que pour des temps grands pour lesquels la solution est proche de l'ETL. Nous suggérons donc d'utiliser une méthode explicite pour calculer la solution sur des temps petits et d'utiliser les techniques de type sommes de wild proposées dans [108]. Nous présentons quelques résultats numériques en particulier pour une distribution initiale très singulière, de type Dirac en énergie, qu'on ne pouvait traiter avec les schémas précédents basés sur la formulation log.

Ces résultats utilisent des propriétés "générales" i.e. qui ne sont pas liées à l'opérateur de FPL : existence et unicité d'un état d'équilibre discret; résolution de systèmes à quatre vitesses (ou modèle de Broadwell) généralisés, que nous utilisons également pour l'équation de Boltzmann dans [e2]; partitions de l'ensemble de N^2 couples de vitesses en $O(N)$ sous ensembles disjoints.

3.3 Méthode de Levermore [s5]

Dans ce travail, on s'intéresse à une méthode de type fermeture des équations de moments proposée par D. Levermore dans [76] et qui est une alternative à la méthode de Grad que j'ai étudiée dans ma thèse. Les modèles de fermeture aux moments reposent sur une hypothèse sur la forme de la fonction de distribution. Dans le cas des modèles de Grad, cela revient à considérer des fonctions de distribution égales à la Maxwellienne de l'ETL multipliée par un polynôme en les composantes du vecteur vitesse. Dans l'approche proposée par D. Levermore, on considère des fonctions de la forme exponentielle d'un tel polynôme.

Cette forme de la fonction de distribution comporte de nombreux avantages : la fonction est bien entendue strictement positive. De plus ce type de fonction de distribution correspond au minimum d'entropie pour un ensemble de moments donné. Le système d'équations de moments associé est strictement hyperbolique (le système est symétrisable). On doit vérifier qu'un ensemble donné de moments est bien réalisable au sens suivant : existe-t-il une fonction positive dont les moments conviennent? Citons quelques travaux sur cette question [165, 69]

J'ai écrit un code qui résout l'équation de FPL pour des fonctions isotropes de la forme

$$f(\varepsilon) = \exp(-(a + b\varepsilon + c\varepsilon^2)),$$

où ε est la variable d'énergie et a , b et c sont des fonctions du temps t (c est positive pour assurer l'intégrabilité de f). L'algorithme est le suivant: on calcule l'évolution des trois premiers moments en énergie de f pour l'équation de FPL par un schéma explicite, puis on projette sur les fonctions de la forme ci-dessus i.e. on calcule les nouveaux coefficients du polynôme pour ces moments par une méthode de Newton et on itère le procédé. Les premiers tests numériques montrent que la solution reste très proche de la solution (approchée) de l'opérateur sans l'hypothèse sur la forme de la fonction de distribution. Cette solution est obtenue avec le code décrit dans la partie précédente. En revanche, lorsqu'on considère la solution d'une équation de type BGK, les solutions sont assez éloignées de la fonction de distribution réelle quel que soit le choix du temps de relaxation choisi pour BGK.

L'extension d'une telle méthode au cas de FPL tridimensionnelle n'est pas immédiate, mais cette première étude a révélé que l'hypothèse faite sur f ne modifiait pas notablement la forme de la fonction de distribution.

4 Analyse spectrale de l'opérateur de Lorentz [a8]

En coll. avec C. Buet et B. Lucquin Desreux

Dans ce travail, on s'intéresse à la limite collision rasante d'un opérateur de collision élastique de type Boltzmann :

$$Q^\varepsilon(f) = \int_{S^{d-1}} B^\varepsilon(\omega - \omega') [f(\omega') - f(\omega)] d\omega', \quad (71)$$

où S^{d-1} est la sphère unité \mathbb{R}^d de dimension $d = 2, 3$ et B^ε est une suite de sections efficaces de collisions qui se "concentrent sur les faibles déviations". Plus précisément, B^ε est une fonction

positive qui ne dépend que de l'angle de déviation θ entre les vitesses ω et ω' de la forme (voir [141]) (cas 1):

$$B^\varepsilon(\theta) = \frac{1}{\varepsilon^3} \sigma\left(\frac{\theta}{\varepsilon}\right) \sin\left(\frac{\theta}{\varepsilon}\right) \chi_{[0,\varepsilon\pi]}(\theta), \quad (72)$$

où $\chi_{[a,b]}$ est la fonction caractéristique de $[a,b]$ et σ une fonction positive. Ce choix exprime que les collisions se concentrent bien vers les petits angles. Cependant, cela ne permet de traiter le cas Coulombien qui correspond à des sections efficaces de la forme (cas 2):

$$B^\varepsilon(\theta) = \sigma(\theta) \frac{1}{\log\left(\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)} \frac{\sin(\theta)}{[\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)]^4} \chi_{[\varepsilon,\pi]}(\theta). \quad (73)$$

Dans ce cas, le petit paramètre ε que les physiciens appellent "paramètre plasma" a une signification physique, liée au nombre de particules dans la sphère de Debye (voir [135]).

Lorsque la fonction f est suffisamment régulière (au moins C^3) et que les sections efficaces possèdent des moments bornés

$$\int_0^\pi \sigma(\theta) \sin(\theta) \theta^2 d\theta < +\infty, \quad \text{cas 1,}$$

on montre que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (Q^\varepsilon(f)(\omega) = C \Delta_\omega f(\omega)),$$

où C dépend des moments de σ et Δ_ω est l'opérateur de Laplace-Beltrami. Ceci permet de montrer que la solution du problème homogène sur S^d associée à l'opérateur de Boltzmann-Lorentz (71) converge vers celle associée à l'opérateur de Laplace-Beltrami pour tout $t \in [0, T]$ où T est un temps arbitraire.

Ces opérateurs peuvent être dérivés à partir des opérateurs de Boltzmann ou Fokker-Planck en considérant des mélanges d'espèces de masses différentes [137, 138, 139]. On rappelle que la limite collisions rasantes de Boltzmann vers Fokker-Planck a été étudiée dans [141, 135]. Dans notre cas, l'opérateur est plus simple mais d'une part, nous pouvons améliorer le résultat en obtenant une convergence de f^ε vers f uniforme en temps et d'autre part, on contrôle la vitesse de retour vers les fonctions d'équilibre: on montre que la vitesse de relaxation des solutions à ε donné tend vers celle du système limite. Ce résultat est basé sur une analyse spectrale des opérateurs. Notons que les deux types d'opérateur ont la même base de fonctions propres. En dimension trois, il s'agit des harmoniques sphériques $Y_{l,m}$ qui forment une base orthonormée de l'espace $L^2(S^2)$. Il est bien connu que ce sont des fonctions propres de l'opérateur de Laplace-Beltrami associées à des valeurs propres $\nu_l = -l(l+1)$. Elles sont également fonction propres de Q^ε (voir [196, 181]) avec des valeurs propres qui ne dépendent que de l données par

$$\nu_l^\varepsilon = 2\pi \int_0^\pi [1 - P_l(\cos(\theta))] B^\varepsilon(\theta) d\theta. \quad (74)$$

où P_l sont les polynômes de Legendre. On montre qu'il existe des constantes C^\pm telles que

$$C^- \nu_l^\varepsilon \leq \nu_l \leq C^+ \nu_l^\varepsilon, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \nu_l^\varepsilon = \nu_l.$$

Ces résultats sont étendus au cas non homogène, en présence de champ magnétique et lorsque la dépendance en module de la vitesse est prise en compte. Ces travaux font l'objet de travaux en cours au niveau numérique [e7].

5 Travaux en cours et perspectives.

Je présente maintenant mes directions de recherche actuelles dans le domaine des opérateurs de collisions.

5.1 Couplage avec Vlasov.

Comme il a été dit en introduction de cette partie, la résolution de l'équation de Vlasov est basée sur un "splitting". Le but des travaux en cours est de coupler les opérateurs de collision décrits dans les sections précédentes avec différents codes développés pour la partie transport.

Nous envisageons par exemple de simuler des expériences d'interpénétration de plasmas ce qui nécessite de traiter simultanément les électrons et les ions. L'ensemble de ces **simulations** était limitée au cas homogène (la fonction de distribution est supposée uniforme dans la variable d'espace), en raison du coût prohibitif des algorithmes pré-existants. Les algorithmes rapides que nous avons mis au point nous permettent de prendre en compte des phénomènes de transport. J'ai encadré le stage de DEA d'A. Allouache [r2] sur ce problème en juin-juillet 1997. Citons dans cette direction le travail de thèse de S. Dellacherie [132] ou les travaux d'E. Epperlein [148].

Dans le cadre du CEMRACS 1999, j'ai encadré un projet de couplage de l'opérateur de collision (3D multigrille) avec un code Vlasov basé sur une formulation semi-lagrangienne de F. Filbet [151]. Ce travail se poursuit.

Avec C. Buet, F. Califano, A. Mangeney et S. Landi nous travaillons sur l'opérateur de Lorentz afin d'inclure l'effet de collisions dans leur code Vlasov-Maxwell. Dans un premier temps, nous avons développé un code pour Lorentz en coordonnées cartésiennes [e5]. Ce code conserve les invariants (masse et énergie) mais il ne préserve pas les états d'équilibre (les fonctions isotropes ne sont pas faciles à représenter sur les maillages cartésiens, voir les travaux sur l'équation de Boltzmann). Plus précisément, il semble que les fonctions de distribution tendent vers des Maxwelliennes pour toutes données initiales. On observe donc un effet de "thermalisation numérique". Même si l'opérateur de Lorentz est une approximation de l'opérateur FPL qui lui thermalise, cet effet est ennuyeux car il dépend fortement du maillage et n'est pas contrôlable. Pour cette raison, nous avons proposé de résoudre l'opérateur de Lorentz sur un maillage sphérique, à partir des maillages fournis par A. Perronnet et F. Hecht. Il s'agit d'une méthode de type éléments finis qui a été implementée par A. Sabry pendant le CEMRACS 1999 avec l'aide de B. Lucquin. Elle permet de résoudre de façon approchée l'équation de Lorentz homogène de façon explicite ou implicite (méthode directe ou par gradient conjugué préconditionné). Le couplage de cet opérateur de collision à un code de transport mono-dimensionnel est en cours [e7].

5.2 Equation de Boltzmann quantique.

Travail en préparation avec S. Mischler.

On s'intéresse à un gaz de photons isotrope et homogène, décrit par la densité $f = f(t, k) \geq 0$ de photons qui à l'instant $t \geq 0$ possèdent l'énergie $k > 0$ qui vérifie l'équation de Boltzmann quantique

$$k^2 \frac{\partial f}{\partial t} = \int_0^\infty (f'(1+f)B(k',k) - f(1+f')B(k,k'))dk', \quad (75)$$

où l'on note $f' = f(t, k')$. La section efficace $B(k, k')/k^2$ représente la probabilité de transition par scattering de l'état d'énergie k à l'état d'énergie k' . On vérifie alors, au moins formellement, que pour toute solution f de (75), on a conservation de la masse $N(f)$ et décroissance d'une entropie $S(f)$ définie dans [202]. Il est alors naturel de penser que les états d'équilibre de (75) sont les états qui maximisent l'entropie à masse donnée. Les distributions de Bose-Einstein (cas $\mu > 0$) et de Planck (cas $\mu = 0$) définies par

$$f_\mu(k) = \frac{1}{e^{k+\mu} - 1}.$$

On vérifie aisément que les f_μ sont des solutions stationnaires de 75 i.e. $Q(f_\mu, f_\mu) = 0$ et que f_μ est solution du problème de maximisation $S(f_\mu) = \max_{N(f)=N} S(f)$, avec μ défini par $N_\mu = N(f_\mu) = N$ lorsque $N \leq N_0$. De plus, l'état de Planck f_0 est le maximum global de l'entropie, i.e. $S(f_0) = \max S(f)$ et satisfait $N(f_0) < \infty$. On peut alors se demander quelle est la solution du problème de maximisation de l'entropie pour $N > N_0$. Caffisch et Levermore montrent dans [198] que les fonctions de masse supérieure à celle de l'état de Planck f_0 qui maximisent l'entropie sont égales à la somme de f_0 et d'une masse de Dirac en 0. Mischler et Escobedo étudient le problème d'évolution et montrent la convergence faible des solutions vers ces états d'équilibre singuliers à l'origine et la convergence forte dans $L^1([k_0, \infty))$ fort (pour tout $k_0 > 0$) lorsque $t \rightarrow \infty$ [202]. Soulignons deux conséquences de leur théorème. Si l'on part d'une donnée initiale régulière, la solution reste régulière pour tout temps. De plus, si $N = N(f(t=0)) > N_0$ alors $f(t, \cdot) \rightarrow f_0 + \alpha \delta_0$ et $\alpha = N - N_0 > 0$, i.e. un état initial régulier de masse supérieure à la masse de l'état de Planck N_0 "condense à l'origine" en temps infini.

J'ai écrit un code qui donne des solutions approchées ayant le comportement singulier attendu : lorsque la masse de la condition initiale dépasse celle de l'état de Planck, on voit apparaître une concentration à l'origine. Il reste à comprendre pourquoi !

Nous envisageons d'essayer d'utiliser ce code de calcul afin de prédire le comportement des solutions notamment dans la limite collisions rasantes qui est l'équation de Kompaneets [203] : $\partial_t f(k, t) = k^{-2} \partial_k (k^4 (f + f^2 + \partial_k f))$.

Autres travaux.

Dans cette partie je présente mes réalisations scientifiques n'entrant pas dans ma thématique de recherche principale, appliquées notamment à l'informatique théorique, notamment pour le parallélisme, à la biologie et au couplage fluides-structures. Enfin, je donne ma liste de publications, la liste des codes numériques sur lesquels j'ai travaillé et la bibliographie.

Analyse mathématique des modèles fluides-structures.

En coll. avec C. Grandmont (Univ. Paris 9)

J'ai commencé en juillet 1997 à travailler sur des modèles d'interaction entre une structure rigide (disque) et un fluide visqueux incompressible régi par les équations de Navier-Stokes. Nous avons notamment étudié le comportement des solutions lorsque le disque s'approche du bord du domaine dans lequel le fluide est confiné. Nous montrons que la solution ne peut rester dans les "espaces d'énergie" à moins que la vitesse et l'accélération du disque ne s'annulent au moment du contact i.e. que le contact soit suffisamment "doux" [e4]. Nous compléterons cette analyse mathématique par des tests numériques en utilisant un code mis au point par de B. Maury.

Ce type de travail peut-être rapproché de travaux de H. Herrero, B. Lucquin-Desreux et B. Perthame sur un modèle de bulles dans un fluide potentiel incompressible pour lequel l'analyse mathématique conduit à des problèmes ouverts intéressants [195].

Biologie

J'ai développé un progiciel qui permet de déterminer une séquence d'acides aminés dans une protéine. Ce logiciel est distribué gratuitement par l'INSERM, les utilisateurs s'engageant à citer l'article [d1] dans lequel la méthode est décrite. Il a été diffusé à une vingtaine d'équipes. En 1997, j'ai travaillé avec P. Ferreira (Univ. Evry) sur un projet de l'unité INSERM 55 d'amélioration d'un logiciel de reconnaissance d'images issues d'un microscope électronique.

Informatique théorique

J'ai travaillé avec S. Delaet de l'équipe parallélisme du Laboratoire Recherche en Informatique (LRI, Univ. Paris 11) sur les algorithmes autostabilisants [p2].

Parallélisme sur internet en langage JAVA [r3].

En coll. avec F. Magniette, LRI, Univ. Paris XI

L'objectif est de paralléliser la résolution de problème de mécanique des fluides en utilisant le langage java et les protocoles de communication standard de l'internet. Ce projet fait l'objet d'un contrat au sein du pôle Paris 6-Dassault dont je suis responsable. On trouvera une description du projet sur <http://www.ann.jussieu.fr/jsc> et dans [r3].

Le principe général envisagé est le suivant : considérons un code qui doit effectuer N calculs (qu'ils soient identiques ou non) sur un ensemble (tout ou partie) de données. L'ensemble des ressources nécessaires est stocké sur un unique ordinateur (le serveur). Celui-ci gère une file d'attente avec l'ensemble des tâches à effectuer. Lorsqu'un client propose ses services par internet, une tâche est alors fournie au client sous forme d'applet JAVA et de données sur lesquelles l'applet effectuera le calcul. Lorsqu'elle est terminée, les résultats sont retransmis au serveur qui teste la validité du résultat (par exemple à l'aide d'une clef publique permettant d'assurer que les calculs ont été réalisés à l'aide de l'applet fournie) et ainsi de suite jusqu'à ce que l'ensemble des tâches soient effectuées. L'avantage de cette technique est d'utiliser le réseau internet et un langage "universel" dont le développement n'est plus à démontrer et donc de disposer d'un nombre considérable de processeurs (et de mémoire!) susceptibles de participer au calcul. Le but est d'évaluer la faisabilité et les difficultés de cette démarche sur un problème simplifié (convection-diffusion) et de comparer les résultats obtenus avec ceux d'autres méthodes de parallélisation (PVM, MPI). L'objectif est de réaliser un test sur une centaine de machines non utilisées la nuit. Les applications potentielles sont très nombreuses et des projets similaires voient le jour. Citons en particulier, au niveau européen, le projet Eurotools <http://www.irisa.fr/EuroTools/>

Liste des travaux présentés

ARTICLES TIRÉS DE LA THÈSE

- [t1] "Hyperbolicity of Grad's extension of hydrodynamic models of ionospheric plasma. Part one: The single species case", *Mathematical Models and Methods in Applied Science (M3AS)*, Vol 4, No 5 , p 625-645, 1994.
- [t2] "Hyperbolicity of Grad's extension of hydrodynamic models of ionospheric plasma. Part two : The two species case", *Mathematical Models and Methods in Applied Science (M3AS)*, Vol 4, No 5 , p 647-667, 1994.
- [t3] "Hyperbolicity of the hydrodynamical model of plasmas under the quasineutrality hypothesis", *Mathematical Models in Applied Science (M2AS)*, Vol 18, p. 627-647 , 1995
- [t4] avec P. Degond, P. Markowich et C. Schmeiser, "Travelling Waves Analysis and jump relations for Euler-Poisson model in Quasineutral limit", *Asymptotic Analysis*, Vol 11, p. 209-240, 1995.
- [t5] "Global solutions to the isothermal Euler-Poisson system for a plasma", *Applied Math Letter*, vol 8, No 1 , p. 19-24, 1995.
- [t6] S. Cordier, P. Degond, P. Markowich et C. Schmeiser, "Travelling Waves Analysis of an isothermal Euler-Poisson model" , *Annales de la faculté des sciences de Toulouse*, Vol V, No 4, p. 599-645, 1996.

ARTICLES POSTÉRIEURS À LA THÈSE

- [a1] avec L. Girard, "Hyperbolicity Analysis of Multimoment Plasma models : Application to Auroral Plasma Outflows along magnetic field lines", *Planetary Space Science*, Vol. 44, No 3, p. 225-238, 1996.
- [a2] avec C. Buet, P. Degond, M. Lemou, "Fast algorithms for numerical conservative and entropic approximations of the Fokker-Planck-Landau operator", *Journal of Computational Physics*, vol 133, p. 1036-1053, 1997.
- [a3] avec C. Buet, P. Degond, "On regularized Boltzmann operator", paru dans *Computer and mathematics with applications* , special issue on Boltzmann equation, edited by Illner and Cercignani, Vol 35, N 1/2, p 55-74, 1998.
- [a4] avec Y. Peng, "Système Euler-Poisson non linéaire. Existence globale de solutions faibles entropiques", *Mathematical Modelling and Numerical Analysis (M2AN)*, Vol. 32, N 1, P 1 à 23, 1998.
- [a5] avec C. Buet, "Numerical analysis of the Fokker-Planck-Landau operator in the isotropic case". *Journal of Computational Physics*, Vol 145, P. 228-245, 1998.
- [a6] avec C. Buet, "Numerical analysis of conservative and entropic schemes for the Fokker-Planck-Landau operator", *SIAM J. Numerical Analysis*, Vol. 36, p.953, 1999.

- [a7] avec E. Grenier, "Quasineutral limit of Euler-Poisson system arising from plasma physics", Prépublication du L.A.N. R96030, to appear in Comm. Partial Differential Equations, CPDE, 1999.
- [a8] avec C. Buet, B. Lucquin "A grazing collision limit for the Boltzmann-Lorentz model". to appear in TTSP, 2000.

ARTICLES SOUMIS.

- [s1] avec E. Grenier, "Quasineutral limit of two systems of Euler equations coupled by the Poisson equation",
- [s2] avec C. Buet, "Numerical analysis of the isotropic Fokker-Planck-Landau equation. Part 2",
- [s3] avec C. Buet, P.-A. Raviart, "multifluid ionization models",
- [s4] avec E. Grenier, Y. Guo, "On the two stream instability",
- [s5] "A Levermore moment's method for the isotropic homogeneous Fokker-Planck-Landau equation ".

NOTES AUX COMPTES RENDUS DE L'ACADÉMIE

- [n1] S. Cordier, "Hyperbolicité des systèmes de Grad", Note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (CRAS), présentée par J.L. Lions, t 315, p 919-924, 1992.
- [n2] S. Cordier, "Hyperbolicité des modèles de plasmas ionosphériques sous l'hypothèse de Quasineutralité", Notes aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (CRAS), présentée par J.L. Lions, t 316, Série I, p. 1035-1040, 1993.
- [n3] S. Cordier, P. Degond, P. Markowich et C. Schmeiser, "Analyse en onde progressive du modèle Euler-Poisson pour un plasma isotherme", Note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (CRAS), présentée par J.L. Lions, t. 318, Série I, p. 801-806, 1994.
- [n4] S. Cordier, P. Degond, P. Markowich et C. Schmeiser, "Analyse en onde progressive et relations de saut pour un modèle fluide de plasma quasineutre", Notes aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (CRAS), présentée par J.L. Lions, t. 318, Série I, p. 929-934, 1994.

CONFÉRENCES AVEC COMITÉ DE LECTURE

- [p1] S. Cordier, P. Degond, P. Markowich et C. Schmeiser, "Quasineutral limit of Travelling waves for the Euler-Poisson model" Proceedings of the Third International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of wave propagation (organisé par SIAM- INRIA), Mandelieu, p. 724-733, 1995.
- [p2] S. Delaet, S. Cordier, J. Beauquier, "Optimum probabilistic self-stabilization on uniform rings", Proceedings of International Workshop on Self Stabilization Problems, Las Vegas, 1995.

ARTICLES EN PRÉPARATION.

- [e1] S. Cordier, F. James, "The pressurless Euler-Poisson system", 1999.
- [e2] C. Buet, S. Cordier, "Simulations of the multispecies Boltzmann equation using Discrete velocity methods", 1999.
- [e3] S. Cordier, E. Grenier, "The electron massless approximation for a Euler-Poisson system", 1999.
- [e4] S. Cordier, C. Grandmont, "comportement asymptotique des solutions d'un modèle fluide-structure près du contact", 1999.
- [e5] C. Buet, S. Cordier, F. Califano, A. Mangeney, S. Landi, "A Lorentz model for plasma experiments", 1999.

- [e6] S. Cordier, S. Mischler, "Numerical method for the compton equation", 1999
- [e7] B. Lucquin, A. Sabry, S. Cordier, "Numerical result for the Lorentz model", 1999.
- DIVERS.
- [d1] F.Ochsenbein-Cordier, S. Cordier, F. Russo-Marie, " A Computer program to determine a protein sequence from an Amino Acid Analysis", Bio-Technology, Vol. 13, p. 276-278, 1994.
- [d2] S. Cordier, F.Petit et T. Lachand-Robert, "Mieux démarrer à l'université : le stage de prérentrée", Actualité de l'Université Pierre et Marie Curie, Vol 2, Avril 1997.
- [d3] S. Cordier, Notes de cours "outils mathématiques", DEUG SCM, 96 pages, 1997, version corrigée en 98 et en 99.
- [d4] S. Cordier , thèse de doctorat, "Modélisation mathématique et simulations numériques du plasma magnétosphérique", ENS Cachan, 11 mars 1994.
- [d5] C. Buet, S. Cordier, P.A. Raviart, Notes sur les modèles cinétiques multiespèces d'ionisation
- RAPPORTS DE STAGES.
- [r1] A. Ambroso, "A conservative, entropic and particle method for the Boltzmann equation". rapport de stage, CMAP, École Polytechnique, 1996.
- [r2] A. Allouache, "Numerical simulations of the Fokker-Planck-Landau equation", rapport de stage, CMAP, École Polytechnique, 1997.
- [r3] J. Fabriano, "Parallel algorithm for domain decomposition solver using java applets and standard internet protocol", rapport de stage, LAN , Univ. Paris 6, 1999.

Listes des codes réalisés.

Pour terminer, je donne une liste des codes d'études que j'ai réalisés ou auxquels j'ai participé et références de travaux l'utilisant et/ou le décrivant.

Problème	langage	Références
Euler Quasineutre	C	[d4]
Euler-Poisson non linéaire	Fortran	[t6]
Euler sans pression - Poisson	C	[e1]
Ionisation multi-espèces	C	[s3]
Fokker-Planck-landau (FPL) 3D	C	[a2] (multigrille, sous réseaux)
FPL linéaire	C	[a6]
FPL isotrope	C	[a5, s2]
FPL isotrope Levermore	C	[s5]
Lorentz Cartesienne	C	[e5]
Lorentz sphérique, implicite	Fortran	[e7]
Boltzmann DVM multi-espèces	C	[e2]
Boltzmann particulaire	C	[r1]
Boltzmann quantique	C	[e6]
Biologie	Pascal	[d1]
JSC - Dassault	Java	[r3]
MateXo	C	http://www.ann.jussieu.fr/matexo/
ACM	Perl	http://acm.emath.fr/

Bibliographie

SYSTÈMES HYPERBOLIQUES

- [1] S. ALINHAC, P. GERARD : Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser, *Inter-Editions/Editions du CNRS*
- [2] J. BONY : Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées nonlinéaires, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* 14 (1981) 209-246.
- [3] F. BOUCHUT : On zero pressure gas dynamics *Advances in Kinetic Theory and Computing, Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences vol. 22, World Scientific, 1994.*
- [4] BOUCHUT, F. JAMES, F., Duality solutions for presurless gases, monotone scalar conservation laws and uniqueness, to appear in CPDE, 1999.
- [5] G. BROWNING, H.-O. KREISS : Problems with different time scales for nonlinear partial differential equations, *Siam J. Appl. Math.* 42 (1982) p704 – 718.
- [6] DAL MASO, G., LE FLOCH, P., MURAT, F, Definition and weak stability of nonconservative product, Preprint Ecole Polytechnique, *J. Math. Pures Appliquées*, to appear, (1994).
- [7] GODLEWSKI, E., RAVIART, P.-A., *Hyperbolic systems of conservation laws*, Ellipse, (1991).
- [8] GLIMM, J., Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, 18: 698-715, 1965.
- [9] E. GRENIER : Pseudodifferential energy estimates, *to appear in Comm. Pure and Applied Math.*.
- [10] E. GRENIER : Quelques limites singulières oscillantes, exposé XXI, *Séminaire équations aux dérivées partielles 1994-1995, Ecole Polytechnique.*
- [11] L. HÖRMANDER : The Analysis of linear partial differential operators, *Springer-Verlag*, 1985
- [12] S. KLAINERMANN, A. MAJDA : Singular perturbations of quasilinear hyperbolic systems with large parameters and the incompressible limit of compressible fluids, *Comm. Pure Appl. Math.* 34,481-524, 1981
- [13] LE FLOCH, P., LIU, T.P., Existence theory for nonlinear hyperbolic systems in nonconservative form, *in Forum Mathematicum* , 5, 261-280, 1993.
- [14] A. MAJDA : Compressible fluid flow and systems of conservation laws in several space variables, *Appl. Math. Sci.* 53, *Springer* 184
- [15] NISHIDA, T., Global solutions for an initial boundary value problem of a quasilinear hyperbolic system, *Japan Acad.*, 44:642-646, 1968.
- [16] S. SCHOCHET : *Fast singular limits of hyperbolic PDEs*, *J. of Differential Equations* 114, 1994, pp. 476 – 512.
- [17] S. SCHOCHET : *Singular limits in bounded domains for quasilinear symmetric systems having a vorticity equation.* *J. Differential Equations*, 68, 1987, pp. 400 – 428.
- [18] S. SCHOCHET : The compressible Euler equations in a bounded domain: existence of solutions and the incompressible limit. *Comm. Math. Phys.* 104 (1986), no. 1, 49–75.

- [19] D. SERRE : Systèmes de lois de conservation II, *Diderot editeur, Arts et Sciences, 1996.*
- [20] M. TAYLOR : Pseudodifferential operators and nonlinear PDE, *Progress in Mathematics* 100, Birkhauser
- SYSTÈME EULER-POISSON - IONISATION - SANS PRESSION
- [21] BEN ABDALLAH, N., MAS-GALLIC, S., RAVIART, P.-A., Analyse asymptotique d'un modèle d'extraction d'ions, CRAS 1993 et Analysis and asymptotics of a one dimensional ion extraction model, G.d.R. S.PAR.CH. 13, 1994.
- [22] BERTHON, Christophe; COQUEL, Frederic Travelling wave solutions of a convective diffusive system with first and second order terms in nonconservation form. Proceedings of the 7th international conference, Zuerich, Switzerland, February 1998. Vol. I., Int. Ser. Numer. Math. 129, 47-54 (1999).
- [23] BOUCHUT, F., Global weak solution of the Vlasov-Poisson system for small electrons mass, Comm. in Part. Diff. Eq. 16, 8 et 9, P 1137, 1991
- [24] L. BOUDIN, A solution with bounded expansion rate to the model of viscous pressurless gases, to appear in SIAM Math. Anal. 2000.
- [25] Y. BRENIER, Convergence of the Vlasov-Poisson System to the Incompressible Euler Equations, to appear in Comm. PDEs., 1999.
- [26] Y. BRENIER, E. GRENIER, On the model of pressureless gases with sticky particles, CAM report, UCLA, dec. 1994
- [27] CHEN, D.P., EISENBERG, S., JEROME, J.W., SHU, C.W. A hydronynamic model of temperature change in open ionic chanel, Biophys J, 1995
- [28] E. CAGLIOTI and C. MAFFEI. Time asymptotic for solutions of Vlasov-Poisson Equation on a circle. Jour. Stat. Phys., 92:301, 1998
- [29] C. CERCIGNANI, H. SATTINGER, DMV (Deutsches mathematische Verreinigug) Lectures notes, (1998)
- [30] Q.G. CHEN, D. WANG, Convergence of shock capturing schemes for the compressible Euler-Poisson equations, preprint, 1994
- [31] COQUEL, Frederic, PERTHAME, Benoit, Relaxation of energy and approximate Riemann solvers for general pressure laws in fluid dynamics. [J] SIAM J. Numer. Anal. 35, No.6, 2223-2249 (1998)
- [32] COQUEL, F.; EL AMINE, K.; GOLDLEWSKI, E.; PERTHAME, B.; RASCLE, P., A numerical method using upwind schemes for the resolution of two-phase flows. [J] J. Comput. Phys. 136, No.2, 272-288, Art. No.CP975730 (1997).
- [33] COQUEL, Frederic; LEFLOCH, Philippe G., An entropy satisfying MUSCL scheme for systems of conservation laws. [J] Numer. Math. 74, No.1, 1-33 (1996).
- [34] FABRE, S., Etude de l'équation de Poisson couplée à la relation de Boltzmann dans \mathbf{R}^N et quasineutralité. Note aux comptes rendus de l'académie des sciences, t. 320, Série I, p. 45-48, 1995.
- [35] S. FRIEDHANDLER, W. STRAUSS, M. VISHIK : Nonlinear instability in an ideal fluid, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 14 (1997), 187 – 209.
- [36] GOLSE, F., SENTIS, R., Analyse asymptotique de l'équation de Poisson couplée à la relation de Boltzmann. Quasineutralité des plasmas, rapport CEA, 1993.
- [37] E. GRENIER : Semiclassical limit of the nonlinear Schrödinger equation in small time, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 126 (1998), 523 – 530.
- [38] E. GRENIER : On the nonlinear instability of Euler and Prandtl equations, *preprint*, 1998.
- [39] E. GRENIER, Existence globale pour le système des gaz sans pression , CRAS, t. 321, Serie I, P. 171-174, 1995.

- [40] Y. GUO, Smooth irrotational flow in the large to the Euler-Poisson system in $\mathbb{R}^3 + 1$, preprint, 1998.
- [41] Y. GUO, A. SHADI TAHVILDAR-ZADETH, Formation of singularities in relativistic fluid dynamics and in spherically symmetric plasma dynamics, preprint, 1998.
- [42] Y. GUO, W. STRAUSS : Instability of periodic BGK equilibria, *Comm. Pure Appl. Math.*, 48 (1995), 861 – 894.
- [43] Y. GUO, W. STRAUSS : Unstable oscillatory-tail waves in collisionless plasmas, to appear in *SIAM J. Math. Anal.*
- [44] S. JUNCA and M. RASCLE. Relaxation of the isothermal Euler-Poisson system to the drift-diffusion equations. *Quarterly Appl. Math.*, 1997.
- [45] JUNGEL, A., PENG, J.Y.,
- [46] C. LATTANZIO and P. MARCATI. The relaxation to the drift-diffusion system for the 3-D isentropic Euler-Poisson model for semiconductors. *Discrete Contin. Dynam. Systems*, to appear.
- [47] K.Y. KIM, Theory of nonmonotonic double layers, *Phys Fluids*, 30, 1987.
- [48] MAIRE, P.H., Ionisation dans un écoulement aérodynamique, Note C.E.A. 2774, 1994.
- [49] PENG, Y.J., Convergence of the fractional step lax friedrichs scheme and Godunov scheme for a nonlinear Euler-Poisson system, preprint univ. clermont ferrand, 12, 1997.
- [50] T. MAKINO, S. UKAI, Sur l'existence des solutions locales de l'équation d'Euler-Poisson pour l'évolution des étoiles gazeuses, *J Math KYoto Univ.*, p. 387, 1987.
- [51] T.MAKINO, B. PERTHAME, Sur les solutions à symétrie sphérique de l'équation d'Euler-Poisson pour l'évolution des étoiles gazeuses, *Japan J Appl Math*, 165-170, 1990
- [52] MARCATI, P., NATALINI, R., Weak solutions to a hydrodynamic model for semiconductors : the Cauchy problem, Preprint, 1994.
- [53] MARKOWICH, P.A., RINGHOFFER, C.A., SCHMEISER, C., semiconductors equations, springer, 1990.
- [54] MARKOWICH, P.A., RINGHOFFER, C.A., SCHMEISER, C., An asymptotic analysis of one dimensional semiconductor devices, *IMA, J. Applied Math.*, 37, pp 1-24, 1986.
- [55] MAS-GALLIC, S., RAVIART, P.-A., Mathematical models of ion extraction and plasma sheaths, G.d.R. S.PAR.CH. 11, 1994.
- [56] D. R. NICHOLSON : Introduction to Plasma Theory, John Wiley and Sons, Inc. 1983.
- [57] B. PERTHAME, Non existence of global solutions to Euler-Poisson Equations for repulsive forces, Japan, *J Appl Math*, 7, P. 367 1990.
- [58] J.R. PIERCE and W.B. HEIBENSTREIT : A new type of high frequency amplifier, *Bell Syst. Tech. J.*, vol 28, 35 – 51, 1949.
- [59] POUPAUD, F., RASCLE, M., VILA, J.P., Global solutions to the isothermal Euler-Poisson system with arbitrary large data, à paraître dans *J.D.E.*, 1994.
- [60] T. SIDERIS, Formation of singularities in three-dimensional compressible fluids, *Comm. Math. Phys.* 101, p. 475, 1985.
- [61] SMOLLER, Shock waves and reaction diffusion equations, *Grundlehren in Mathematischen Wissenschaft*, Springer Verlag, no 258, 1987.
- [62] I. VIDAV : Spectra of perturbed semigroups with applications to transport theory, *J. Math. Anal. Appl.*, 30 (1970), 264 – 279.
- MODÈLES MULTI-MOMENTS
- [63] CHAPMAN, S., COWLING, T.G., *The Mathematical Theory of Nonuniform Gases*, Cambridge University press, New York, 1970.

- [64] P. CHARRIER, B. DUBROCA, J.L. FEUGEAS, L. MIEUSSENS, Discrete-velocity models for kinetic nonequilibrium flows, *C. R. Acad. Sci., Paris, Ser. I, Math.* **326**, No.11, 1347-1352 (1998)
- [65] DEMARS, H.G., SCHUNK, R.W., Comparaison of solutions to Bi-Maxwellian and Maxwellian Transport Equations for subsonic Flows, *J. of Geophys. Res.*, **92**, no.A6, 5969-5990, (1987).
- [66] DEMARS, H. G., and R. W. SCHUNK, Solutions to bi-Maxwellian transport equations for the polar wind, *Planet. Space Sci.*, **37**, 85, (1989).
- [67] DEMARS, H. G., and R. W. SCHUNK, Comparison of semikinetic and generalized transport models of the polar wind, *Geophys. Res. Lett.*, **18**, 713, (1991).
- [68] GOMBOSI, T.I., RASMUSSEN, C.E., Transport of gyration dominated space plasmas of thermal origin. 1 - Generalized transport equations, *J. Geophys. Res.*, **96**, 7759, (1991).
- [69] GOMBOSI, T.I., GROTH, C.P.T., ROE, P.L., BROWN, S.L., 35-moment closure for rarefied gases: Derivation, Transport equations and wave structure, *submitted to Phys. Fluids*, (1994).
- [70] H.G. GRAD, On the kinetic theory of rarefied gases, *Comm. Pure Appl. Math.*, **2**, 331-407, (1949).
- [71] H. GRAD, *Principles of the kinetic theory of gases*, in Flugge's Handbuch der Physik XII, Springer, Berlin (1958), pp. 205-294.
- [72] H. GRAD, in *Rarefied Gas Dynamics*, F. Devienne (ed.), Pergamon, London, England, (1960), pp. 10-138.
- [73] H. GRAD, *Asymptotic theory of the Boltzmann Equation*, *Phys. Fluids* **8** (1963), pp. 147-181, and *Asymptotic theory of the Boltzmann Equation II*, Proceedings of the third international symposium on rarefied gas dynamics, vol 1, J. A. Laurmann (ed.), Academic Press, New-York, (1963), pp. 26-59.
- [74] H. GRAD, *Asymptotic equivalence of the Navier-Stokes and non-linear Boltzmann equation*, AMS Symposium on applications of partial differential equations, (1964), pp. 154-183.
- [75] P. LE TALLEC, J.-P. PERLAT, Boundary conditions and existence results for the Levermore's moments system, preprint CEREMADE univ. Dauphine, Paris IX No 9850, 1998.
- [76] LEVERMORE, D., Moment closure hierarchy, Actes du Workshop "Fondements mathématiques des équations cinétiques" du GdR SPARCH, (1994).
- [77] MINTZER, D., Generalized orthogonal polynomial solutions of the Boltzmann equation, *Phys. Fluid*, **8**, 1076-1090, (1968).

EQUATION DE BOLTZMANN

- [78] L. ARKERYD, *On the Boltzmann equation, I and II*, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **45**, (1972), pp. 1-34.
- [79] L. ARKERYD, *Stability in L^1 for the spatially homogeneous Boltzmann equation*, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **103**, (1988), pp. 151-167.
- [80] L. ARKERYD, *Intermolecular forces of infinite range and the Boltzmann equation*, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **77**, (1981), pp. 11-21.
- [81] C. BARDOS, F. GOLSE, and D. LEVERMORE. Fluid dynamical limits of kinetic equations, I : Formal derivation. *J. Stat. Phys.*, **63** : 323-344, 1991.
- [82] C. BARDOS, F. GOLSE and D. LEVERMORE, *Fluid dynamics limits of kinetic equations II; convergence proofs for the Boltzmann equation*, *Comm. on Pure and Appl. Math.* **46** (1993), pp. 667-753.
- [83] G. A. BIRD, *Molecular Gas Dynamics and the direct simulation of gas flows*, Clarendon Press, Oxford, 1994.
- [84] A. BOBYLEV, A. PALCZEWSKI, J. SCHNEIDER, *A consistency result for a discrete-velocity model of the Boltzmann equation*, Institute of Applied Mathematics, Warsaw University, 1995.

- [85] A.V. BOBYLEV, TOSCANI, G., On the generalization of the Boltzmann H-theorem for a spatially homogeneous Maxwell gas, *Jal of Math Phys* , Vol 33, 7, 1992.
- [86] C. BORGNAKKE, PS. LARSEN, *Statistical model for Monte-Carlo simulation of polyatomic gas mixtures* , Journal of Comp Phys, Vol. 18 p. 405-420, (1975).
- [87] J. F. BOURGAT, L. DESVILLETES, P. LE TALLEC, B. PERTHAME, *Microreversible collisions for polyatomic gases and Boltzmann's theorem*", Eur Journal of Mech, B fluids, (1994).
- [88] C. BUET, *A discrete-velocity scheme for the boltzmann operator of rarefied gas dynamics*, to be published in *Transp. Theory. Stat. Phys.*
- [89] R. E. CAFLISH, *The fluid dynamic limit of the nonlinear Boltzmann equation*, *Comm. Pure Appl. Math.* **33** (1980), pp. 651-666.
- [90] R.E. CAFLISH, *The Boltzmann equation with a soft potential, I: Linear, spatially homogeneous*, *Comm. Math. Phys.*, **74**, (1980), pp. 71-96.
- [91] R.E.CAFLISH, L. PARESCHI, An implicit Monte Carlo method for rarefied gas dynamics I: The space homogeneous case, *J. Computational Physics*, 154, pp. 90-116, (1999).
- [92] C. CERCIGNANI, *The Boltzmann Equation and its Applications*, Springer, New York, (1988).
- [93] C. CERCIGNANI, R. ILLNER, M. PULVIRENTI, *The mathematical theory of dilute gases*, *Appl. Math. Sc.* 106, Springer (1994).
- [94] R. DI PERNA and P. L. LIONS, *On the Cauchy problem for the Boltzmann equations: global existence and weak stability*, *Annals of Math.* **130** (1990), pp. 321-366.
- [95] P. DEGOND, S. MAS GALLIC, *The weighted particle method for convection diffusion equations*, *Math. Comp*, Vol. 53, pp 485-507 (part 1) and pp 509-525 (part 2), (1989)
- [96] L. DESVILLETES, *Sur un modele de type Borgnakke-Larsen conduisant a des lois d'energie non-linéaires en température pour les gaz parfaits polyatomiques*, Actes du workshop du GDR SPARCH, (1995).
- [97] T. ELMROTH, *On the H-function and convergence towards equilibrium for a space homogeneous molecular density*, *S.I.A.M. J. of Appl. Math.*, **44**, (1984), pp. 150-159.
- [98] E.GABETTA, L. PARESCHI, M.RONCONI, Central schemes for hydrodynamical limits of discrete-velocity kinetic equations, *Transp. Theo. Stat. Phys.* (to appear).
- [99] R. GATIGNOL, *Théorie cinétique des gaz à répartitions discrètes de vitesses*, Springer, New York, (1975).
- [100] D. GOLDSTEIN, B. STURTEVANT, J. E. BROADWELL, *Investigations of the Motion of Discrete-Velocity Gases*, in "Rarefied Gas Dynamics : Theoretical and Computational Techniques", E. P. Muntz, D. P. Weaver and D. H. Campbell (eds), *Progress in Astronautics and Aeronautics*, Vol. 118, AIAA, Washington DC, (1989).
- [101] D. B. GOLDSTEIN, *Discrete-Velocity collision dynamics for polyatomic molecules*, *Phys. Fluids A4*, pp 1831-1839, (1992).
- [102] F. GROPENGIESSER, H. NEUNZERT, J. STRUCKMEIER, *Computational methods for the Boltzmann equation* . Venice 1989 : The state of Art in Appl. and Industrial math., eds. R. Spigler, Kluwer acad. publ., (1990)
- [103] T. GUSTAFFSON, *Global L^p properties for the spatially homogeneous Boltzmann equation*, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **103**, (1988), pp. 1-37.
- [104] R. ILLNER, S. RASANOW, Random discrete velocity method : possibles bridges between the Boltzmann equation, discrete velocity models and particle simulation, *Non linear kinetic theories and mathematical aspects of hyperbolic systems*, Proc. Rapallo, April (1992).
- [105] ILLNER, R. , WAGNER, W., A random discrete velocity model and approximation of the Boltzmann equation , *Jal of Stat Phys.*, vol 70, No 3/4, 1993.

- [106] ILLNER, R. , WAGNER, W., A random discrete velocity model and approximation of the Boltzmann equation : conservation of momentum and energy , to appear in TTSP.
- [107] T. INAMURO, B. STURTEVANT, *Numerical Study of Discrete-Velocity Gases*, Phys. Fluids, Vol. A2 pp 2196-2203, (1990).
- [108] S.JIN, L. PARESCHI, G. TOSCANI, Uniformly accurate diffusive relaxation schemes for multiscale transport equations, Preprint CDNSNS98-314, GeorgiaTech, (1998). Submitted to SIAM J. Numerical Analysis.
- [109] S. MAS GALLIC, F. POUPAUD, *A deterministic particle method for the linearized Boltzmann operator*, Trans. Theory Stat. Phys. Vol. 17, 311-345., 4 (1987).
- [110] K. NANBU, *Direct simulation schemes derived from the Boltzmann equation*, J. Phys, Japan Vol. 49 p. 2042, (1980).
- [111] K. NANBU, *Model kinetic equation for the distribution of discretized internal energy*, Math Methods and Models in the Applied Sci, (1992).
- [112] B. NICLOT, P. DEGOND, F. POUPAUD, *Deterministic particles simulations of the Boltzmann transport equation of semiconductors*, J. Comp. Phys., Vol. 78, pp 313-345, (1988).
- [113] L. PARESCHI, G.RUSSO, Asymptotic preserving Monte Carlo methods for the Boltzmann equation, Transp. Theo. Stat. Phys. (to appear).
- [114] L. PARESCHI, G.RUSSO, Numerical solution of the Boltzmann equation I: Spectrally accurate approximation of the collision operator, SIAM J. Numerical Analysis (to appear).
- [115] L. PARESCHI, G.RUSSO, On the stability of spectral methods for the homogeneous Boltzmann equation, Transp. Theo. Stat. Phys. (to appear).
- [116] F. ROGIER, J. SCHNEIDER, *A direct Method for solving the Boltzmann Equation*, Transp. Theory. Stat. Phys, Vol. 23, pp 313-338 (1994).
- [117] Y. SHIZUTA : On the classical solutions of the Boltzmann equation, *Comm. Pure Appl. Math.*, 36 (1983), 705 – 754.
- [118] J. SCHNEIDER, *Une méthode déterministe pour la résolution de l'équation de Boltzmann*, Ph. D thesis, University Paris 6, (1993).
- [119] Z. TAN, P. L. VARGHESE, *The $\Delta - \epsilon$ method for the Boltzmann equation* , J. Comput. Phys. , Vol 110, (1994).
- [120] C. VILLANI, Contribution à l'étude mathématique des collisions en théorie cinétique, habilitation à diriger des recherches, 1999.
- [121] B., WENNERBERG, A., PULVIRENTI, A maxwellian lowerbound for the Boltzmann equation, Preprint (1996).
- [122] B. WENNERBERG *Stability and exponential convergence in L^p for the spatially homogeneous Boltzmann equation*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, 20 (1993), n^0 8, pp. 935-964.

EQUATION DE FOKKER-PLANCK

- [123] A.A. ARSENE'V and O.E. BURYAC. On the connection between a solution of the Boltzmann equation and a solution of the Landau-Fokker-Planck equation. Math. USSR Sbornik, Vol 69 , No. 2 pp. 465-478, 1991.
- [124] A.A. ARSENE'V and N.V. PESKOV. On the existence of a generalized solution of Landau's equation. USSR Comput. Math. Phys. Vol. 17 , pp. 241-246, 1977.
- [125] V. V. ARISTOV, F. G. CHEREMISIN, *On the connection between a solution of the Boltzmann equation and a solution of the Landau-Fokker-Planck equation*, Math. USSR Sbornik, Vol. 69, N^0 2, pp. 465-478 (1991).

- [126] R. BALESCU, Phys. Fluids, 3, 52, 1960
- [127] Yu.A. BEREZIN, V.N. KHUDICK, M.S. PEKKER , Conservative finite difference schemes for the Fokker-Planck equation not violating the law of an increasing entropy, J. of Comp. Phys, Vol 69, pp. 163-174, 1987.
- [128] A.V. BOBILEV. I.F. POTAPENKO and V.A. CHUYANOV, Kinetic Equations of the Landau type as a model of the Boltzmann Equation and Completely Conservative Difference Schemes. U.S.S.R. Comput. Maths. Math. Phys. Vol. 20, Vol 4 pp. 190-201, 1981.
- [129] C. BUET, S. DELLACHERIE, R. SENTIS, entropic average for the Fokker-Planck-Landau equation, rapport CEA , 1998.
- [130] H. COHN. Numerical integration of the Fokker-Planck equation and the evolution of stars clusters. The Astrophysical Journal, 234, 1036-1053, 1979.
- [131] H. COHN. Late core collapse in star clusters and the gravothermal instability. The Astrophysical Journal, 242, 765-771, 1980.
- [132] S. DELLACHERIE, Contribution à l'analyse et la simulation numérique des équations cinétiques décrivant les plasmas chauds, these de doctorat université paris VII, Nov. 1998.
- [133] J.F., CLOUET, K., DOMELEVO, Solution of a kinetic stochastic equation modelling a spray in a turbulence gas flow, R.I. 330 , C.M.A.P., Ecole Polytechnique, 1996.
- [134] D. DECK, G. SAMBA, *Le code Procions*, Note C.E.A. N^o 2780, C.E.A./C.E.L.-V, F- 94195 Villeneuve St. Georges, (1994).
- [135] P. DEGOND and B. LUCQUIN-DESREUX. The Fokker-Planck asymptotics of the Boltzmann collision operator in the Coulomb case, Math. Models and Methods in Appl.Sci, vol. 2, No 2 , p 167-182, 1992.
- [136] P. DEGOND and B. LUCQUIN-DESREUX. An entropy scheme for the Fokker-Planck collision of plasma kinetic theory. Numer. Math. vol. 68, pp 239-262, 1994.
- [137] P. DEGOND and B. LUCQUIN-DESREUX *The asymptotics of collision operators for two species of particles of disparate masses*, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, vol.6, n^o 3, (1996), pp 405-436.
- [138] P. DEGOND and B. LUCQUIN-DESREUX *Comportement hydrodynamique d'un mélange gazeux formé de deux espèces de particules de masses très différentes*, C. R. Acad. Sc. Paris, t.322, Série I, p 405-410, (1996).
- [139] P. DEGOND and B. LUCQUIN-DESREUX *Transport coefficients of plasmas and disparate mass binary gases*, Transp. Theory in Stat. Phys., Vol 25, n^o 6, pp. 595-633 (1996).
- [140] P. DEGOND and S. MAS-GALLIC, *The weighted particle method for convection-diffusion equations, part I: the case of an isotropic viscosity, part II: the anisotropic case*, Math. Comput. **53** (1989), 485-526.
- [141] L. DESVILLETES. On asymptotics of the Boltzmann equation when the collisions become grazing. Trans.Th. and Stat. Phys., Vol 21, No 3 pp. 259-276, 1992.
- [142] L. DESVILLETES, *On the convergence of the splitting algorithms for some kinetic equations*, Asympt. Anal., **6**, n^o 4, (1993), pp. 315-333.
- [143] L. DESVILLETES, *Some applications of the method of moments for the homogeneous Boltzmann and Kac equations*, Arch. Rat. Mech. Anal., **123**, n^o 4, (1993), pp. 387-404.
- [144] L. DESVILLETES, *Convergence to equilibrium in various situations for the solution of the Boltzmann equation*, Nonlinear Kin. Th. and Math. Aspects of Hyp. Syst., Series on Adv. in Math. for Appl. Sci., 9, (1992), 99. 101-114.
- [145] L. DESVILLETES, S. MISCHLER, About the splitting algorithm for Boltzmann and B.G.K. equations. [J] Math. Models Methods Appl. Sci. 6, No.8, 1079-1101 (1996).

- [146] L. DESVILLETES, C. VILLANI, On the spatially homogeneous Landau Equation for Hard potentials. Part I : Existence, Uniqueness and Smoothness, Preprint du DMI, ENS de Paris, 1998.
- [147] L. DESVILLETES, C. VILLANI, On the spatially homogeneous Landau Equation for Hard potentials. Part II : H-Theorem and Applications, Preprint du DMI, ENS de Paris, 1998.
- [148] EPPERLEIN, E.M. , Fokker-Planck modelling of electrons transport in laser-produced plasmas, in *Laser and particles Beams* , Vol 2 , No 2 , p. 257-272, 1994.
- [149] EPPERLEIN, E.M. , Implicit and conservative difference schemes for the Fokker-Planck equation, *J. Comp. Phys*, Vol. 112, p. 291, 1994
- [150] R. EYMARD, T. GALLOUET and R. HERBIN. Schémas de type volume finis. Ecole cea-edf-inria, problèmes non-linéaires appliqués, Paris, Octobre 1992.
- [151] F. FILBET, semi-lagrangian method for the Vlasov equations, 1999.
- [152] E. FRENOD and B. LUCQUIN-DESREUX. On conservative and entropy discrete axisymmetric Fokker-Planck operators. *M2AN*, Vol 33, p. 307 1998.
- [153] L. GREENGARD and V. ROKHLIN. A fast algorithm for a particle simulation. *J. Comput.Phys* Vol. 73, 1987.
- [154] S. JORNA, L. WOOD, *Fokker-Planck calculations on relaxation of anisotropic velocity distributions in plasmas*, *Phys. Rev. A*, Vol. 36, N^o 1, (1987).
- [155] S. KULLBACK, A lower bound for discrimination information interms of variation, *IEE Trans. Info. The.* 4(1967)126-127
- [156] O. LARROCHE. Kinetic Simulations of a plasma collision experiment. *Phys. Fluids B*, Vol. 5, No 8, 1993.
- [157] M. LEMOU. Exact solutions of the Fokker-Planck equation. *C.R. Acad. Sci. t.319, Serie 1*, pp. 579-583, 1994.
- [158] M. LEMOU. Multipole expansions for the Fokker-Planck equation, preprint of MIP, Université de Toulouse 3, 1997.
- [159] M. LEMOU. Fast algorithms for the axisymmetric Fokker-Planck equation, preprint of MIP, Université de Toulouse 3, 1999.
- [160] R. LENARD, *Ann. Phys.*, Vol 3, p. 390, 1960
- [161] O. LIE-SVENDSEN, M.H., REES, An improved kinetic model for the polar outflow of a minor ion, *Jal. Geophys. Res.*, 1995.
- [162] P.L. LIONS, *On Boltzmann and Landau equations*, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, (1994), 346, pp. 191-204.
- [163] S. LIVI, E. MARSCH, Generation of solar wind proton tails and double beams by coulomb collisions, , *Jal. Geophys. Res.*, Vol. 92, No A7, pp. 7255-7261, 1987.
- [164] B. LUCQUIN-DESREUX. Discrétisation de l'opérateur de Fokker-Planck dans le cas homogène, *C.R. Acad. Sci. Paris, A 314, série 1*, pp. 407-411, 1992.
- [165] L. MIEUSSENS, Thèse de l'université de Bordeaux, 1999.
- [166] L. PARESCI, G.RUSSO, G.TOSCANI, Methode spectrale rapide pour l'equation de Fokker Planck Landau, Preprint (1999).
- [167] L. PARESCI, G. RUSSO, spectral method for the Boltzmann and/or Fokker-Planck operator, 1999.
- [168] L. PARESCI, G.RUSSO, G.TOSCANI, Fast spectral methods for the Fokker-Planck-Landau collision operator of plasma physics, Preprint (1999).
- [169] L. PARESCI, G.TOSCANI, C.VILLANI, Spectral methods for the non cut-off Boltzmann equation and numerical grazing collision limit, Preprint (1999).

- [170] M.S. PEKKER and V.N. KHUDIK. Conservative Difference Schemes for the Fokker-Planck equation, U.S.S.R. Comput. Maths. Math. Phys. Vol. 24,3 , pp. 206-210, 1984.
- [171] I.F. POTAPENKO and V.A. CHUYANOV. A completely conservative difference scheme for the two-dimensional Landau equation. U.S.S.R. Comput. Maths. Math. Phys. , Vol 20, 2 , pp. 249-253, 1980.
- [172] M.N. ROSENBLUTH, W. MACDONALD and D.L. JUDD. Fokker-Planck equation for an Inverse-Square Force. The Physical Review Vol 107, 1, pp. 1-6, 1957.
- [173] W. M. MACDONALD, M. N. ROSENBLUTH et W. CHUCK, *Relaxation of a system of particles with Coulomb interactions*, Phys. Rev., Vol. 107, N^o 2, (1957).
- [174] J. SHAEFFER, Convergence of a difference scheme for the Vlasov-Poisson-Fokker-Planck system in one dimension, SIAM J of Num. Anal. , Vol. 35, p. 1149, 1998
- [175] G. TOSCANI, Entropy production and the rate of convergence to equilibrium for the Fokker-Planck equation, preprint of Univ. Pavia, Dept of Math., 1997.
- [176] C. VILLANI *On the Landau equation: weak stability and global existence*, Adv. Diff. Eq., 1, (5): pp. 793-816, (1996)
- [177] J.C. WHITNEY. Finite Difference Methods for the Fokker-Planck Equation. J. Comput. Phys. Vol 6 , pp. 483-509, 1970.

PHYSIQUE DES PLASMAS

- [178] S. I. BRAGINSKII, *Transport processes in a plasma*, Reviews of Plasma Physics, Vol. 1, M. A. Leontovitch (ed.), (1965).
- [179] CHEN, F.F., *Introduction to plasma physics*, Plenum Press, 1977.
- [180] A. DECOSTER, *Equations fluides et coefficients de transport des plasmas*, Research in Applied Math. Ed. by P.A. Raviart "Modelling of collisions", Masson, 1997.
- [181] DELCROIX, J.L., BEERS, A., *Physique des plasmas*, CNRS Editions, 1994.
- [182] ISHIMARU. Principles of Plasma physic
- [183] N.A. KRALL, D. A. TIDMANN, *Shock waves in collisionless plasmas*, Wiley-Interscience, 1971.
- [184] N. A. KRALL, A. W. TRIEVELPIECE, *Principles of plasma Physics*, Mc Graw- Hill, New-York, 1973.
- [185] L. LANDAU, E. LIFSCHITZ : Mécanique des fluides, *Mir*.
- [186] PALMADESSO, P.J., MITCHELL, H.G., GANGULI, S.B., multimoment fluid simulation of transport processes in the auroral zones, American geophysical union, (1988).
- [187] PANTELLINI, F., Etude de la structure des chocs non collisionnels dans les plasmas spatiaux, *Thèse de l'Université Paris VII*, 1992.
- [188] PARKS, G., *space plasmas an introduction* , Addison wesley, the advanced book program, (1991).
- [189] ROBINEAU, A., Modélisation du transport parallèle du plasma ionosphérique : Etude de mécanisme d'extraction à haute latitude, *Thèse de l'Université Pierre et Marie Curie*, 1992.
- [190] SCHUNCK, R.W.: Mathematical structure of transport equations for mutispecies flows, *Rev. geophys. space phys.*, 15, 429-445, 1977.
- [191] SPITZER, L, HARM, R, Phys. rev, vol 89, p.977, 1953.
- [192] G.R. , WILSON, Semikinetic modeling of the outflow of ionospheric plasma through the topside collisional to collisionless transition region, *Jal. Geophys. Res.*, Vol. 97, pp. 10551, 1992.
- [193] ZAGDEEV, R., KENNEL, C., Des ondes de chocs sans collisions, *Pour la science*, p88, no 164, Juin 1991.

COUPLAGE FLUIDES-STRUCTURES

- [194] GRANDMONT C., Interactions fluides-structure, thèse de l'université Paris VI et articles en préparation, 1997.
- [195] H. HERRERO, B. LUCQUIN-DESREUX, B. PERTHAME *On the motion of a dispersed phase in a potential flow*, Publication du Labo. d'Analyse Numérique de Paris 6 n^o 97021, (1997).
LORENTZ-COMPTON-KOMPANEETS
- [196] M. BAYET, J. L. DELCROIX, J. F. DENISSE *Théorie cinétique des plasmas homogènes faiblement ionisés, II*, J. Phys. Rad., **16**, pp. 274-280, (1955).
- [197] N. BEN ABDALLAH, P. DEGOND, A hierarchy of model for semiconductors, to appear in Journal of Mathematical Physics.
- [198] R.E. CAFLISH, C.D. LEVERMORE, *Equilibrium for radiation in a homogeneous plasma*, Phys. Fluids **29** (1986) 748-752.
- [199] G. COOPER, *Compton Fokker-Planck equation for hot plasmas*, Phys. Rev. D **3** (1974) 2312-2316.
- [200] H. DREICER, *Kinetic Theory of an Electron-Photon Gas*, Phys. Fluids **7** (1964) 735-753.
- [201] M. ESCOBEDO, M.A. HERERO, J.J.L. VELASQUEZ, *A nonlinear Fokker-Planck equation modelling the approach to thermal equilibrium in a homogeneous plasma*, Trans. Amer. Math. Soc. **350** (1998) 3837-3901.
- [202] M. ESCOBEDO, S. MISCHLER, article en préparation et note aux CRAS.
- [203] A.S. KOMPANEETS, *The establishment of thermal equilibrium between quanta and electrons*, Soviet Physics JETP **4** (1957) 730-737.