

# **ANALYSE STRUCTURELLE DU PANTHEON**



**Un exemple de modélisation de systèmes  
maçonnés complexes par les éléments  
finis : résultats et difficultés.**

# **PLAN**

## **PANTHÉON**

- 1. Introduction : pathologies des maçonneries**
- 2. Comparaison des méthodes d'analyse sur le cas des voûtes**
  - 1. Analyse limite**
  - 2. Analyse aux éléments distincts**
  - 3. Analyse aux éléments finis**
- 3. Une application concrète : le Panthéon**
  - 1. But et principe de l'étude, description de l'édifice, de ses désordres**
  - 2. Hypothèses d'explication des désordres**
  - 3. Choix du type d'analyse**
  - 4. Calibration et choix des modèles**
  - 5. Résultats et interprétation**
- 4. Conclusion**

# Maçonneries : généralités

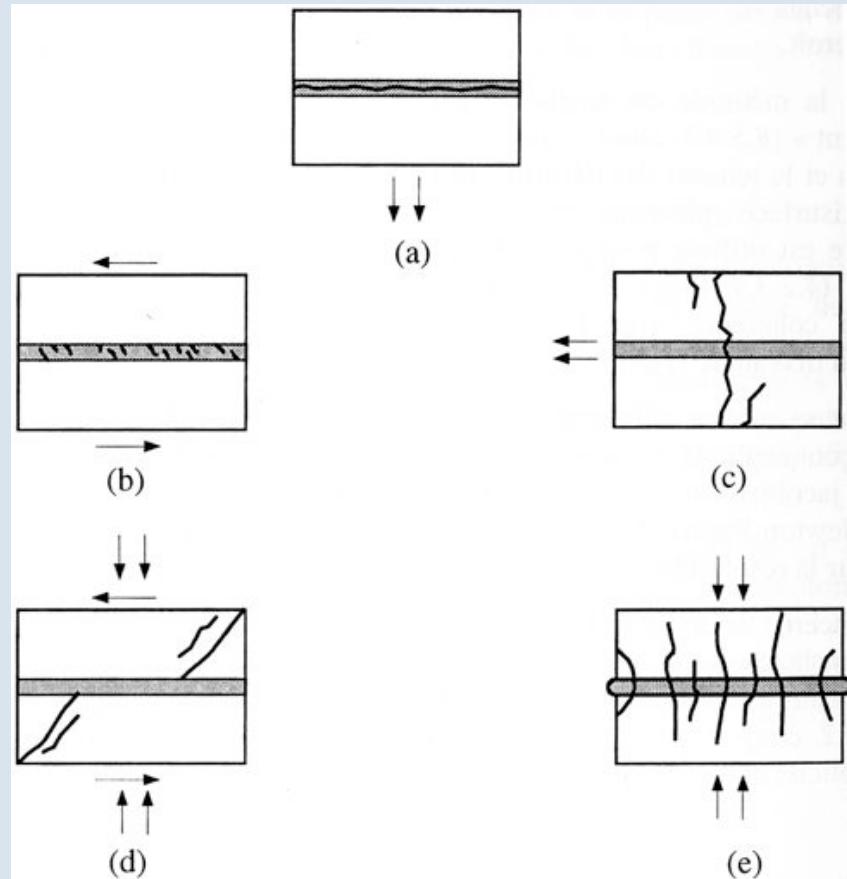
- Maçonnerie : substrat (pierre, brique), joints éventuels (mortiers, coulis), interfaces
- Piliers, voûtes, murs et panneaux
- Varié, anisotrope, hétérogène, caractéristiques variables
- Résistance en compression entre 2 et 20 Mpa
- Résistance en traction très faible : 0 à 500 kPa
- Résistance au cisaillement médiocre
- Problèmes particuliers de durabilité
  - ⇒ Question de l'entretien et de l'évaluation du patrimoine historique

# Maçonneries : pathologies

- Pathologies d'origine chimique : lessivage des joints, attaque des pierres, ...
- Pathologies d'origine « structurelle » :
  - ⇒ compression (écrasement des joints ou des pierres)
  - ⇒ traction (fendage des pierres, rupture des interfaces, fissures et fractures de toutes sortes)
  - ⇒ cisaillement (fissures et fractures)
  - ⇒ mécanismes très particuliers de ruines des voûtes

# Maçonneries : pathologies

ANTHÉON



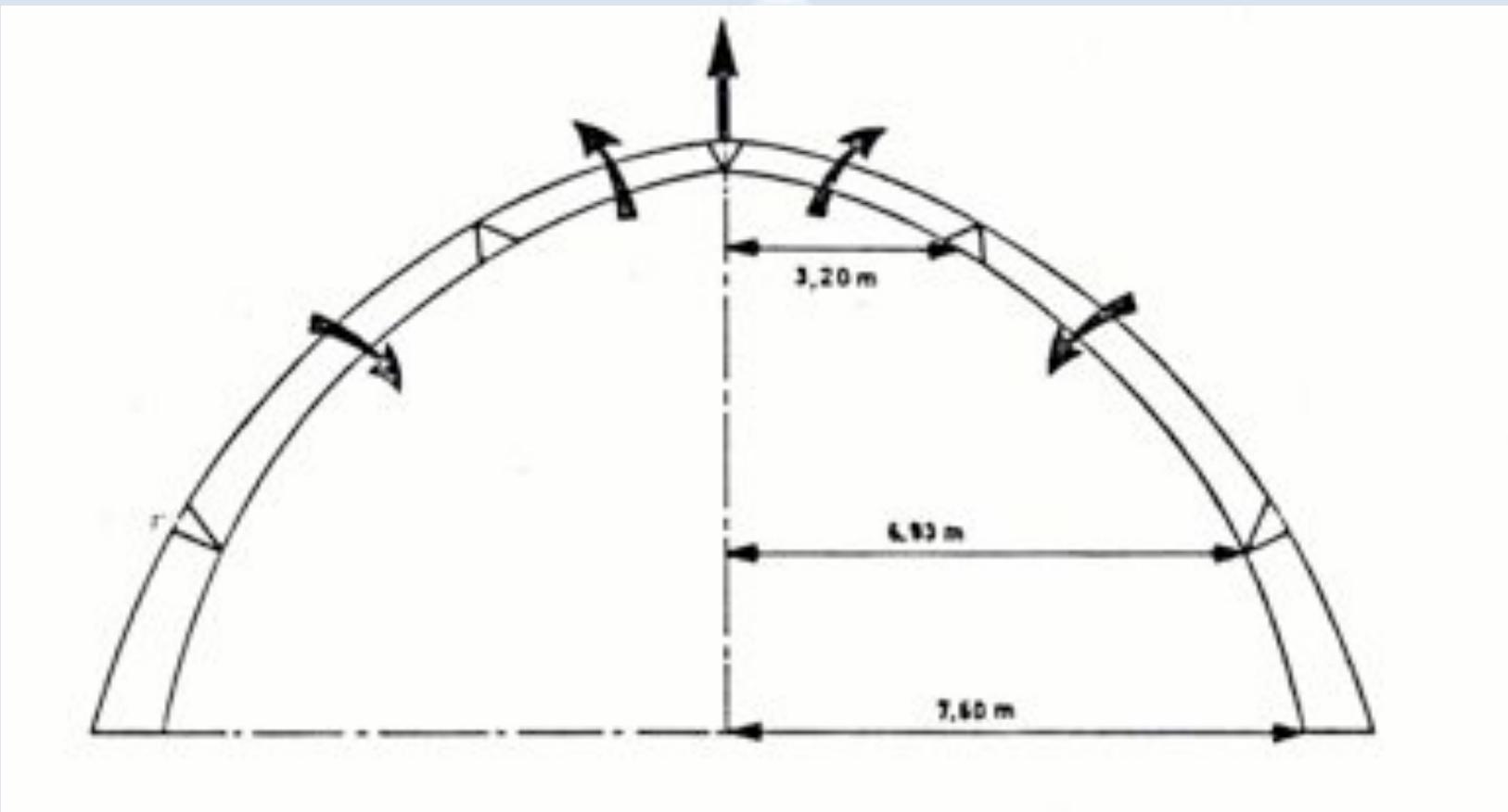
Introduction

# Ruines des voûtes

PANTHÉON

- Sauf qualité inquiétante des matériaux constitutifs, les mécanismes classiques de ruine des voûtes se font par formations de charnières sur certains joints.  
    ⇒ Ouverture / Ecrasement du joint
- Rotations des blocs autour de ces charnières
- Diminution progressif du degré d'hyperstaticité de la voûte jusqu'à effondrement
- Le nombre de charnières à la ruine (donc la forme du mécanisme) varie selon le type de charge appliquée.

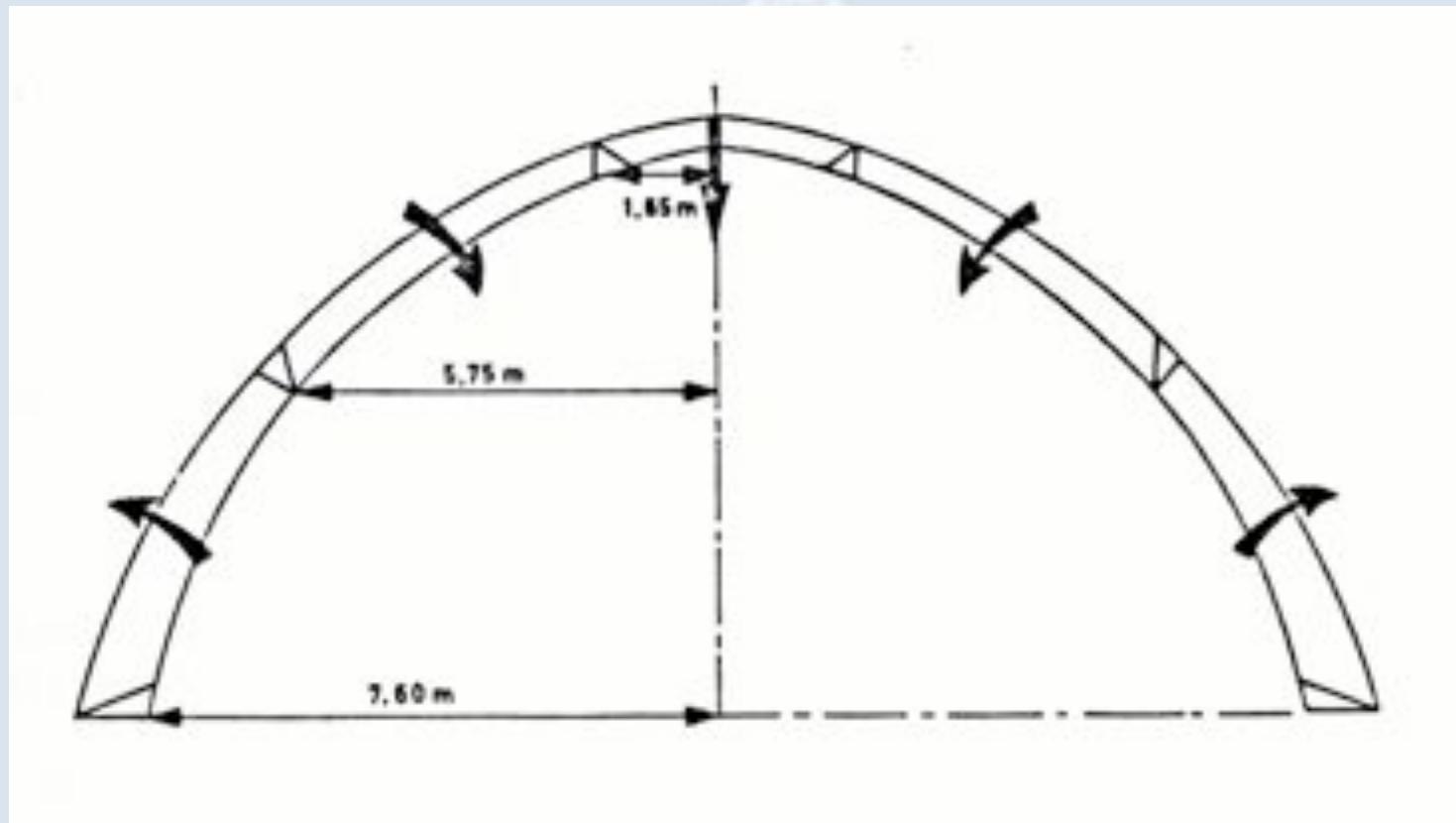
# Voûte sous défaut de charge symétrique



Formation de cinq charnières / Soulèvement de la clef

Comparaison des méthodes d'analyse sur le cas des voûtes

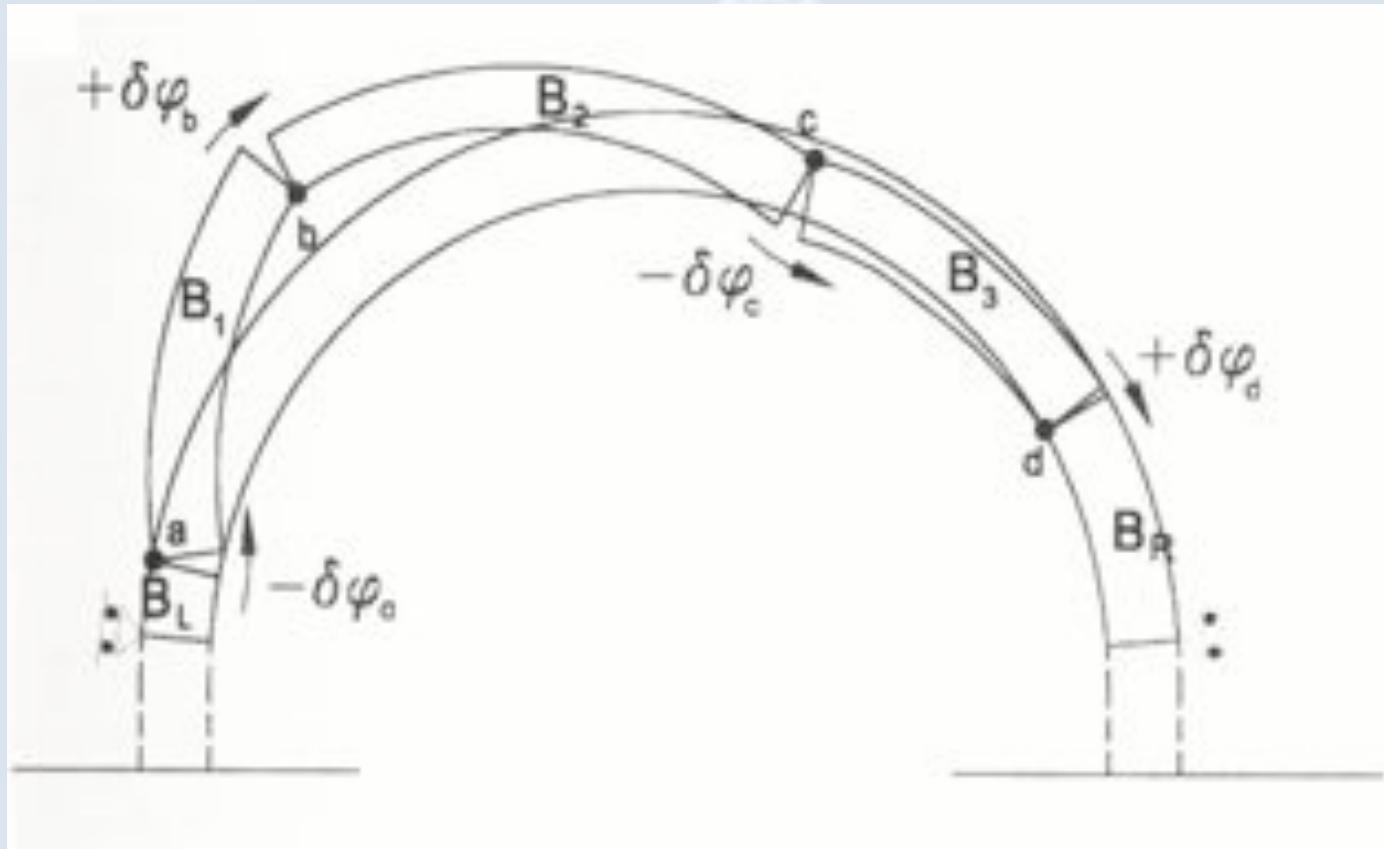
# Voûte sous excès de charge symétrique



Formation de six charnières / Effondrement de la clef

Comparaison des méthodes d'analyse sur le cas des voûtes

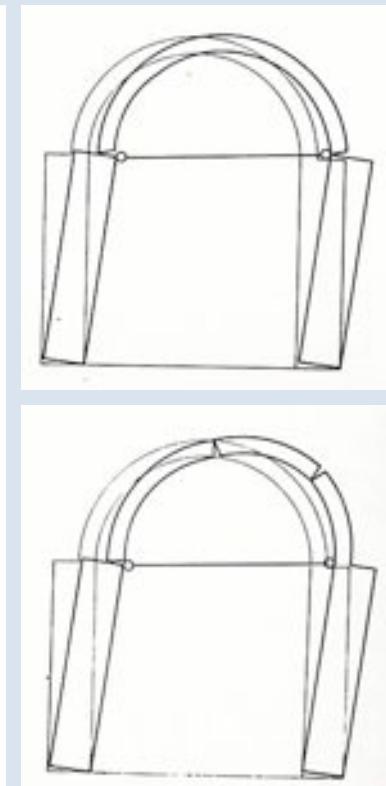
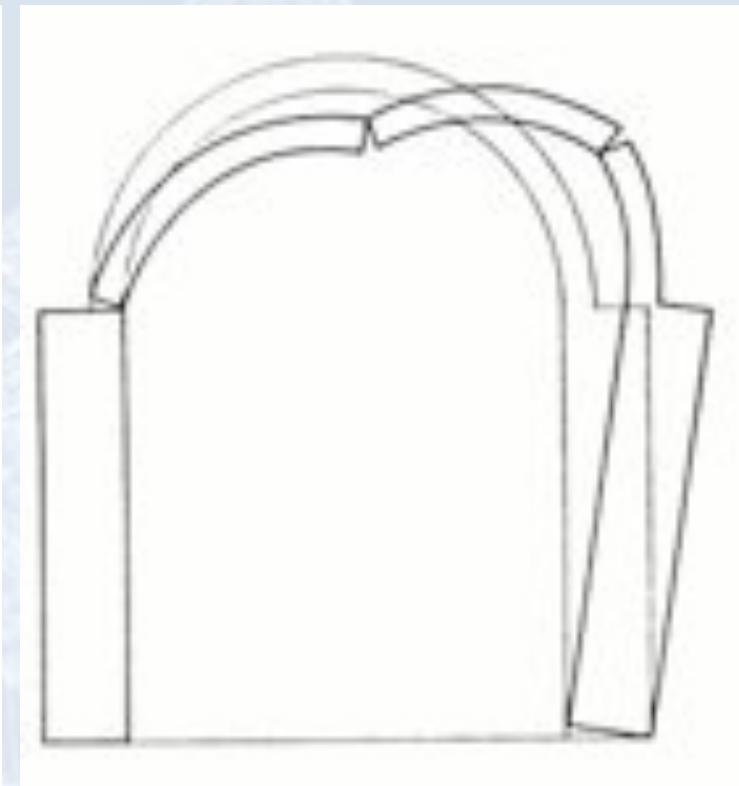
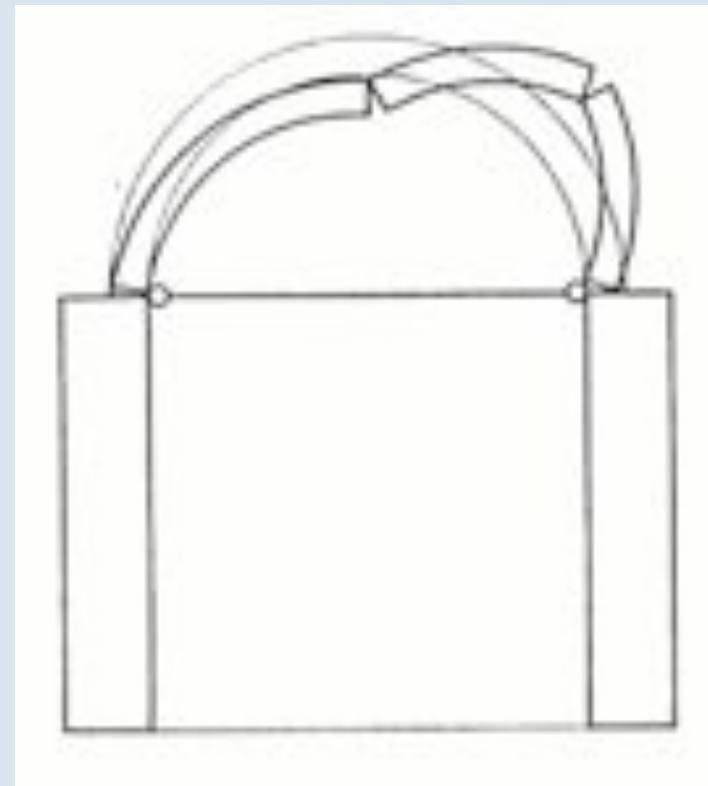
# Voûte sous excès de charge asymétrique



Formation de quatre charnières

Comparaison des méthodes d'analyse sur le cas des voûtes

# Voûte sous charge horizontale



Comparaison des méthodes d'analyse sur le cas des voûtes

# Méthodes d'analyses

- Trois grands types de méthodes :
  - ⇒ Analyse limite
  - ⇒ Analyse aux éléments distincts
  - ⇒ Analyse aux éléments finis
- Méthodes très différentes dans leurs natures et leur raisonnements : ne donnent pas le même type de résultats.

# Analyse limite

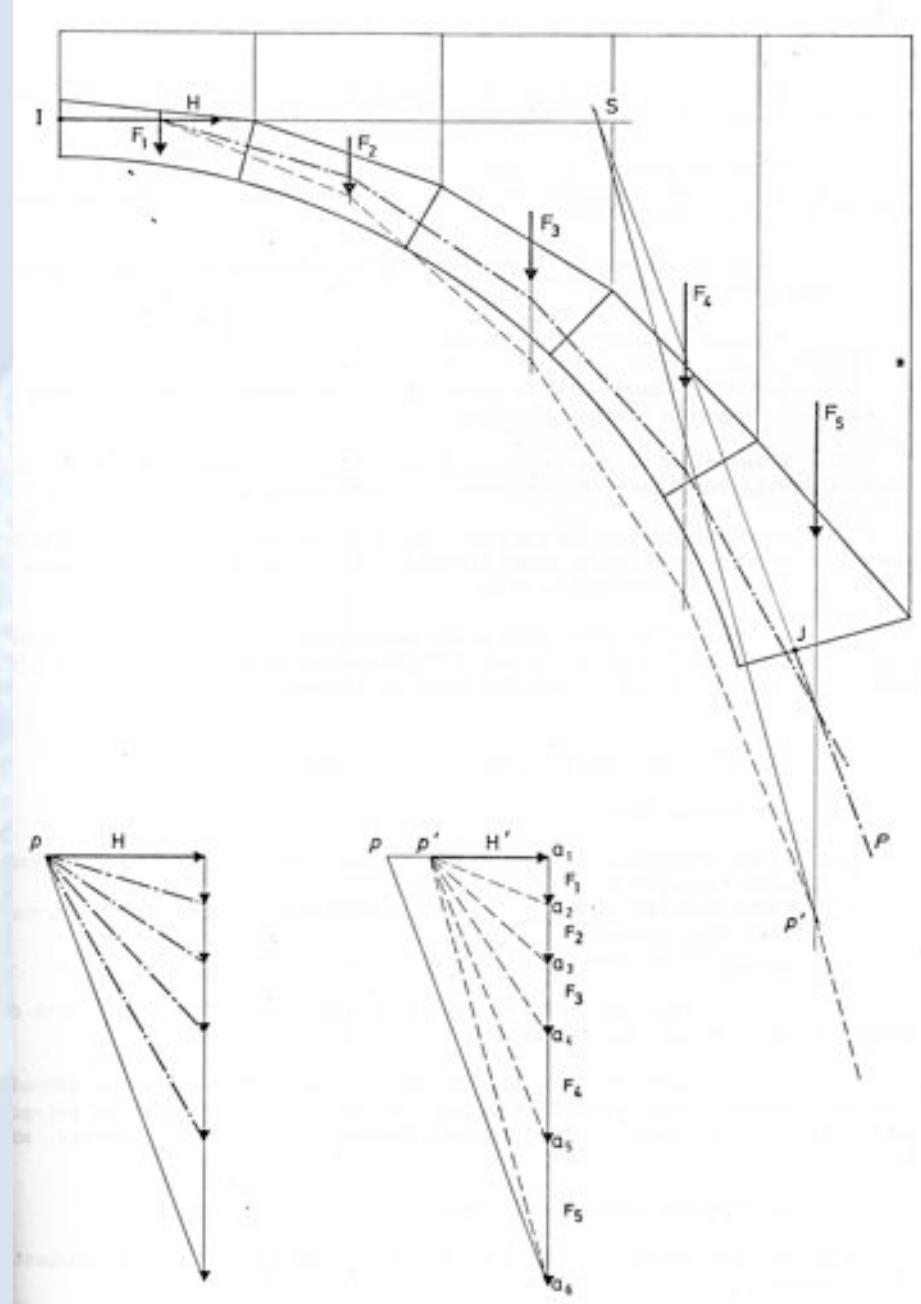
PANTHÉON

- Repose aujourd’hui sur les travaux de Heyman (1964) et la formalisation du calcul à la rupture de Salençon (1979)
- Vision globale des éléments voûtés et explicitation de mécanismes de ruine : s’intéresse à la STABILITE du système
- Type d’approche historiquement employé :
  - ⇒ Règles de proportion antiques et médiévales
  - ⇒ Statique graphique initiée par Coulomb (1773)
  - ⇒ Formalisation : épure de Méry (1840)
  - ⇒ Théorie du calcul à la rupture et implémentation (programme *VOUTE* du SETRA 1979-1982)

# Epure de Méry

- Repose sur le tracé du polygone funiculaire et sur la détermination de la ligne des centres de pression.

- Principe de Méry :  
*« L'intrados et l'extrados forment deux limites dont la courbe des pressions ne doit jamais sortir, et, lorsque cela arrive, l'équilibre est impossible. »*



Comparaison des méthodes d'analyse sur le cas des voûtes

# Avantages et inconvénients

- Avantages :

- ⇒ Dans sa forme actuelle, méthode puissante et adaptable
- ⇒ Méthode légère, d'interprétation et d'implémentation faciles
- ⇒ Donne directement une indication sur la stabilité du système

- Inconvénients :

- ⇒ Ne permet pas d'accéder à l'état de contraintes ou aux champs de déformation
- ⇒ Ne donne qu'une condition nécessaire de stabilité; nécessite de mener une réflexion sur les coeff. de sécurité pour obtenir une condition suffisante

# Analyse aux éléments distincts

- Repose sur une représentation du milieu par un assemblage de blocs maillés, rigides ou déformables
- Les mouvements des blocs sont régis par les lois de la dynamique et par des lois d'interface au niveau des joints
- Les blocs n'interagissent que par leurs sommet, arêtes ou faces
- Le schéma de résolution est de type différences finis, généralement explicite (nécessite de calibrer le pas de temps pour ne pas propager les perturbations trop loin)
- Les discontinuités, comme les joints, sont traités comme des conditions aux limites pour la résolution
- A chaque pas de temps, actualisation des positions des blocs et des conditions de contact

Comparaison des méthodes d'analyse sur le cas des voûtes

# Avantages et inconvénients

- Avantages :

- ⇒ Adapté au milieux discontinus et hétérogènes (pas d'HPP)
- ⇒ Avec des paramètres adéquats, excellente précision (contraintes, déplacement et stabilité)
- ⇒ Pas de formation de matrice de raideur
- ⇒ Implémentation incrémentale des discontinuités

- Inconvénients :

- ⇒ Calibration des paramètres nécessaires
- ⇒ Schéma aux différences finis relativement instable
- ⇒ Inapplicable aux grandes structures

# Analyse aux éléments finis

- Edifices en maçonnerie généralement très surdimensionnés : plus utile d'avoir l'état de contrainte et le champ de déformation que les conditions globales de stabilité
- Géométries parfois complexes (monuments historiques) qui rendent délicat l'utilisation des techniques usuelles de RdM

- Méthode des éléments finis adaptée, puissante et souple

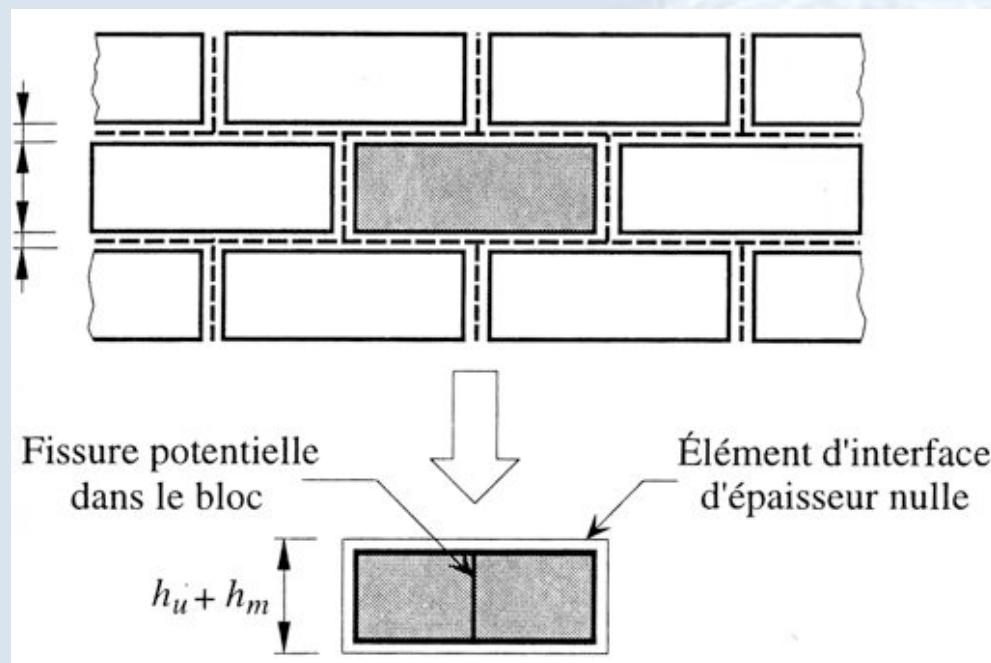
**MAIS**

- Usine à gaz (stockage et inversion d'une matrice de raideur)
- Importance cruciale des paramètres d'entrée
- Gestion des non-linéarités et réalisme des résultats

Comparaison des méthodes d'analyse sur le cas des voûtes

# Types d'analyse aux EF : analyse locale

- Modélisation de la maçonnerie comme un ensemble de blocs étendus séparés par des éléments d'interface où se concentrent les phénomènes inélastiques (fissuration, glissement, écrasement)
- Nécessite un modèle micromécanique précis (comportement des éléments et critères de rupture)



Exemple de modèle en blocs étendus faisant intervenir une fissure potentielle localisée dans le bloc

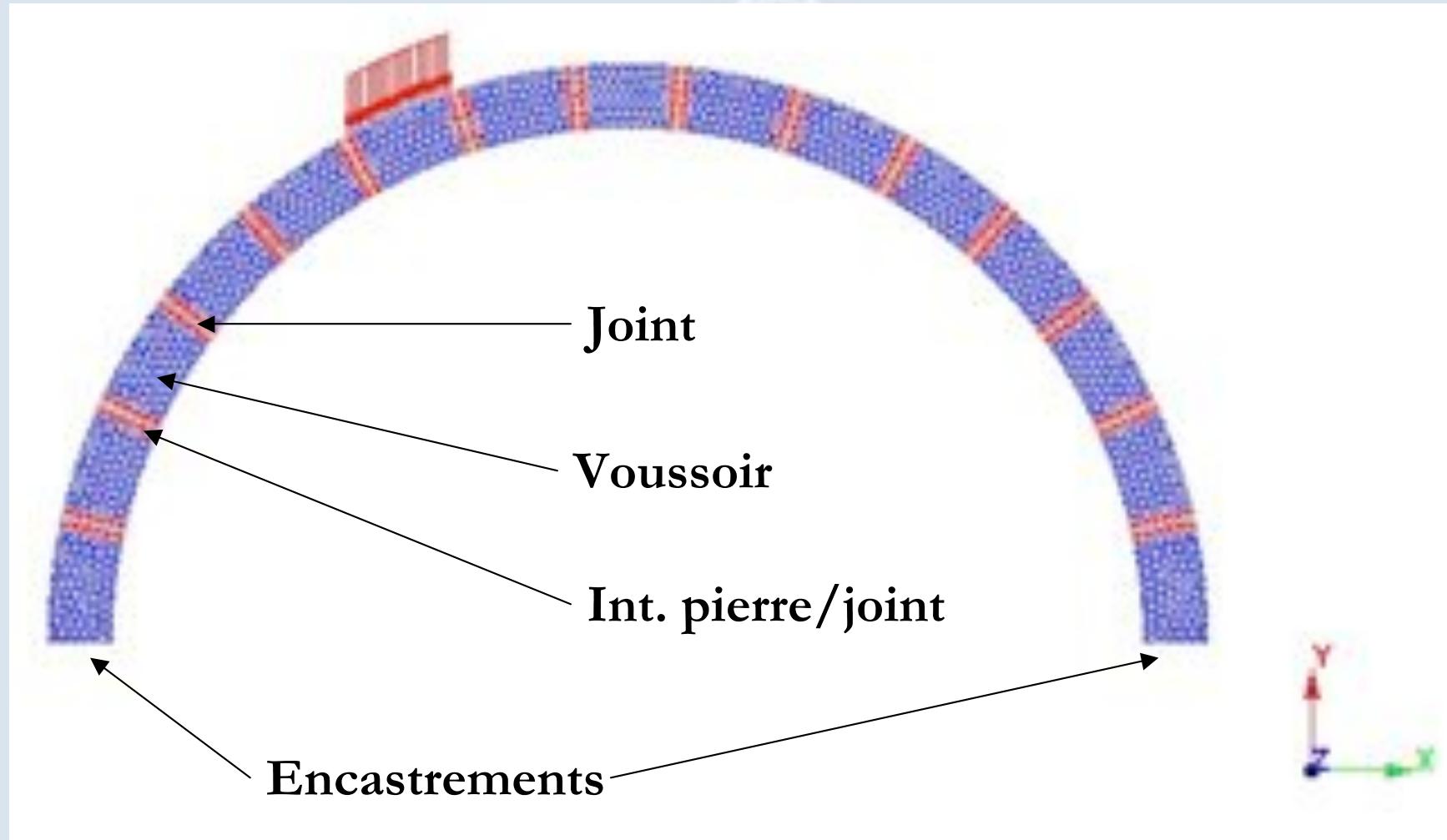
Comparaison des méthodes d'analyse sur le cas des voûtes

## Analyse locale : commentaires

- Robuste, capable de suivre les chemins de chargements
- Excellente précision des résultats : qualitativement (profils de rupture) et quantitativement ( $\sim 15\%$  d'écart)
- Donne des indications sur les paramètres locaux et sur la stabilité globale (modes de ruine, charges de rupture)
- Utile pour les calibrations de modèles homogénéisés
- Peu utilisé, sauf pour les voûtes (pourtant le moins probant)
- Délicat à mettre en œuvre (problème de la détermination des nombreux paramètres d'entrée)
- Usage réservé à des systèmes ou des sous-systèmes très localisés

# Analyse locale : exemple

PANTHÉON

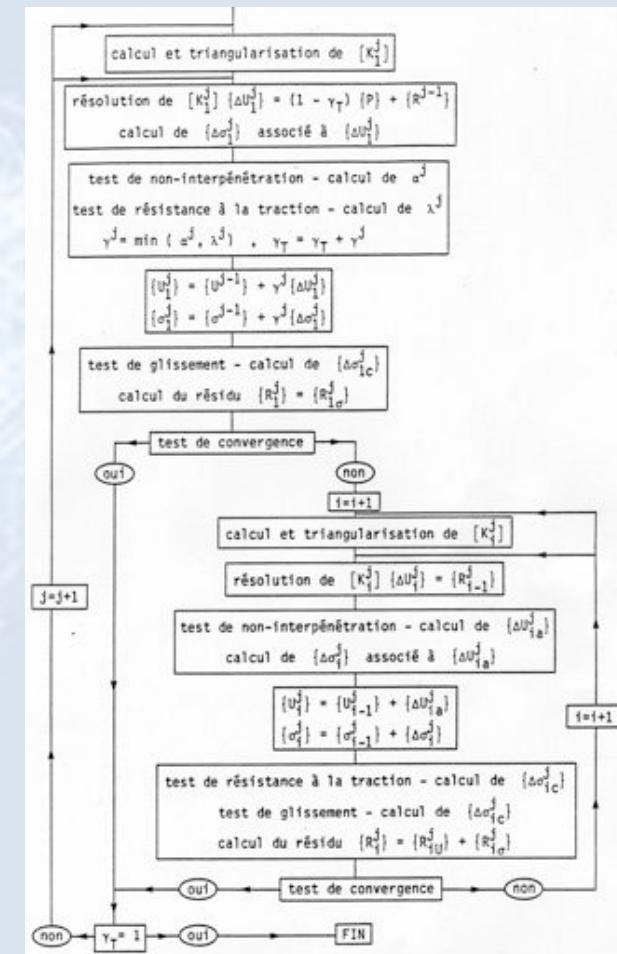
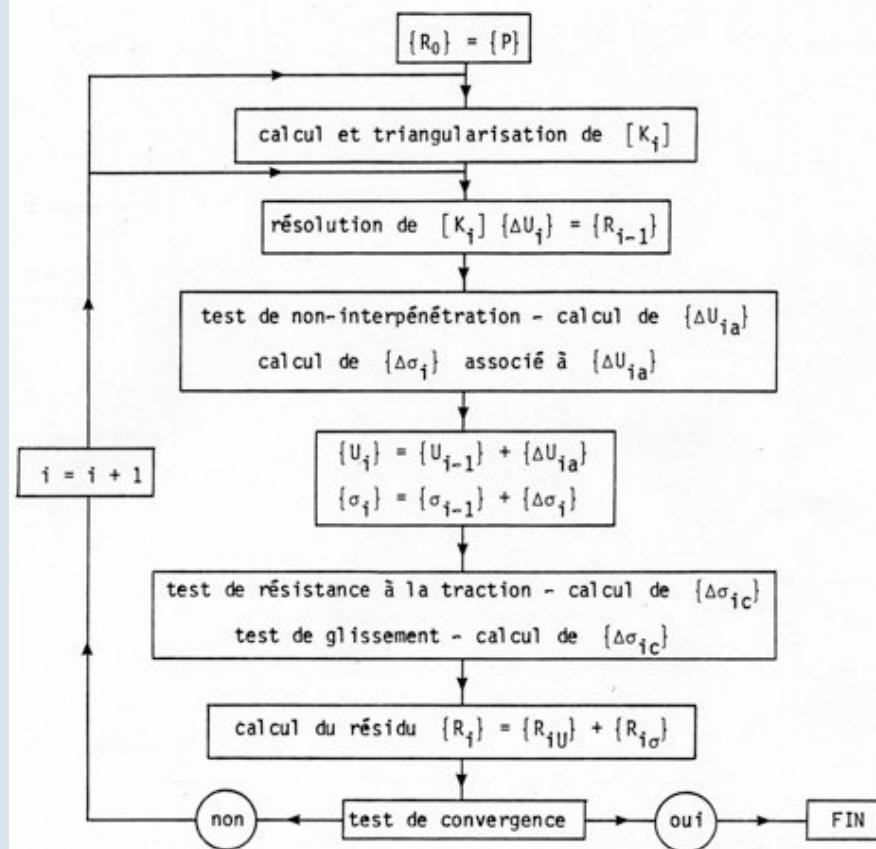


Comparaison des méthodes d'analyse sur le cas des voûtes

# Analyse locale : pas si simple !

On emploie le module d'éléments de contact non-linéaires  
TCNL du logiciel CESAR-LCPC...

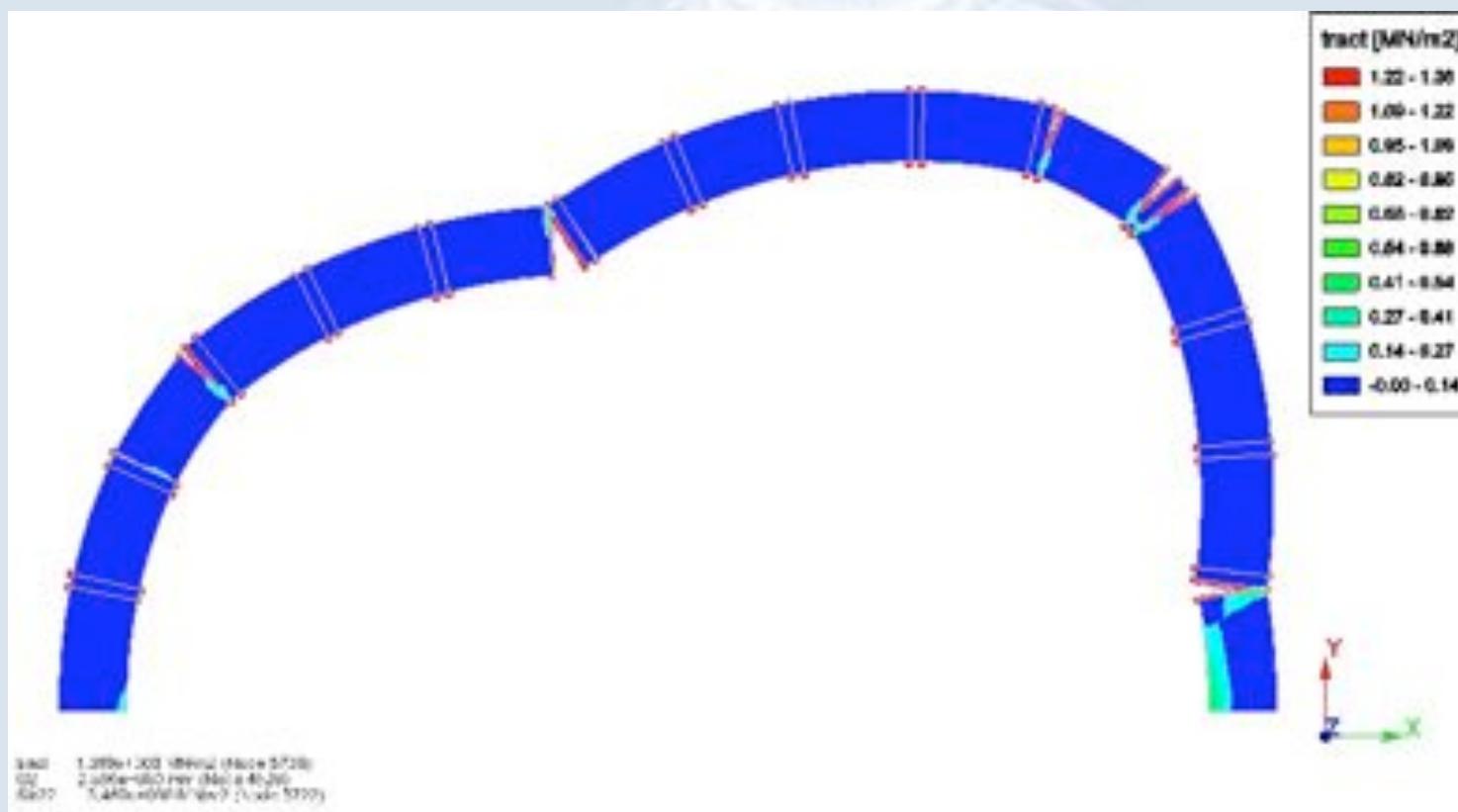
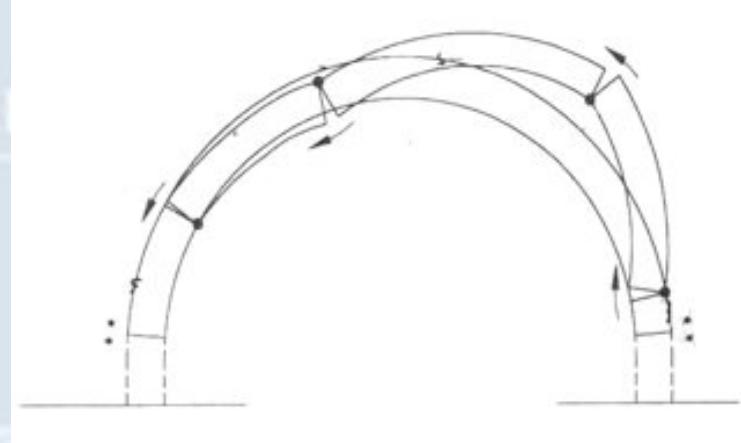
L'indice  $i$  désigne le numéro de l'itération.



son des méthodes d'analyse sur le cas des voûtes

## Analyse locale : résultats

- Mode de ruine en quatre charnières
- Etat de contraintes dans la voûte



Comparaison des méthodes d'analyse sur le cas des voûtes

# Types d'analyse aux EF : analyse globale

- Modèles globaux qui relient déformations et contraintes dans la maçonnerie considérée comme un composite
- Repose sur des techniques d'homogénéisation des différents composants (substrat, joints) pour parvenir à un comportement global du matériau (isotrope ou non).
- Choix à faire dans le modèle de comportement et dans les critères de plasticité et de résistance

⇒ Analyse élastique linéaire

⇒ Analyse linéaire « améliorées » (pas de résistance en traction)

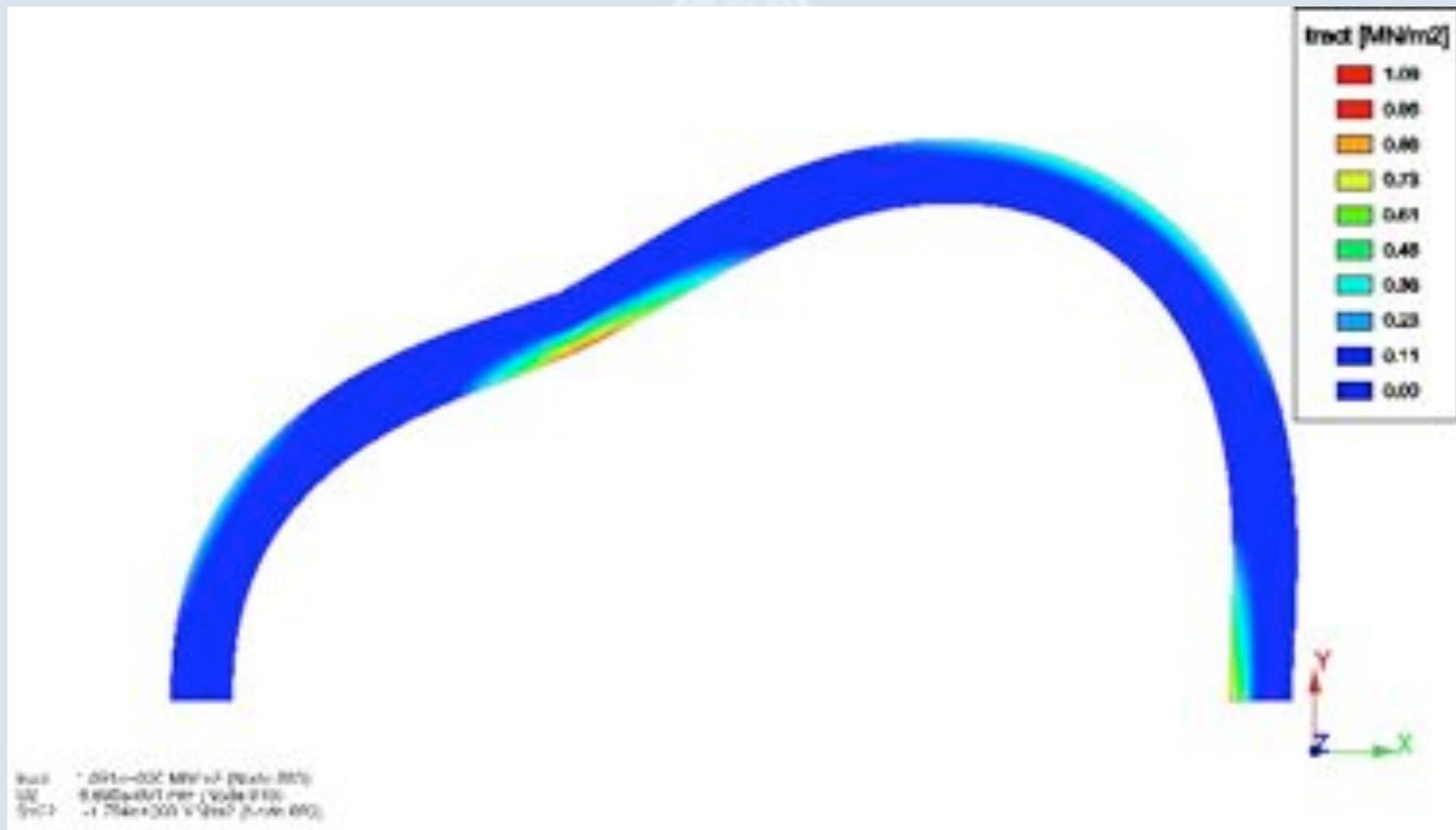
⇒ Analyse non-linéaire

## Analyse globale : commentaires

- Adapté aux structures étendues
- Accès aux champs de contraintes moyennes et aux déformées
- Met bien en évidence les points-clefs de la structure
- Ne permet pas d'accéder aux modes de ruine
- Très sensible aux paramètres d'entrée du modèle
- Résultats uniquement qualitatifs dans le cas linéaire
- Nécessite une calibration parfois fastidieuse (analyse locale) des paramètres homogénéisés, notamment dans le cas non-linéaire
- Recul et esprit critique à conserver

# Analyse globale : exemple

Déformée et état de contraintes, pas de mode de ruine



Comparaison des méthodes d'analyse sur le cas des voûtes

# Analyse du Panthéon aux EF

- Etude réalisée dans le cadre d'une assistance à la maîtrise d'ouvrage pour le Ministère de la Culture : audit sur la stabilité du Panthéon
- Focalisation sur la stabilité et l'évolution des dômes du Panthéon : cœur des problèmes de stabilité de l'édifice
- But : identifier les points-clefs du fonctionnement structurel, valider une hypothèse d'explication des désordres observés, disposer au mieux d'éventuels renforcements

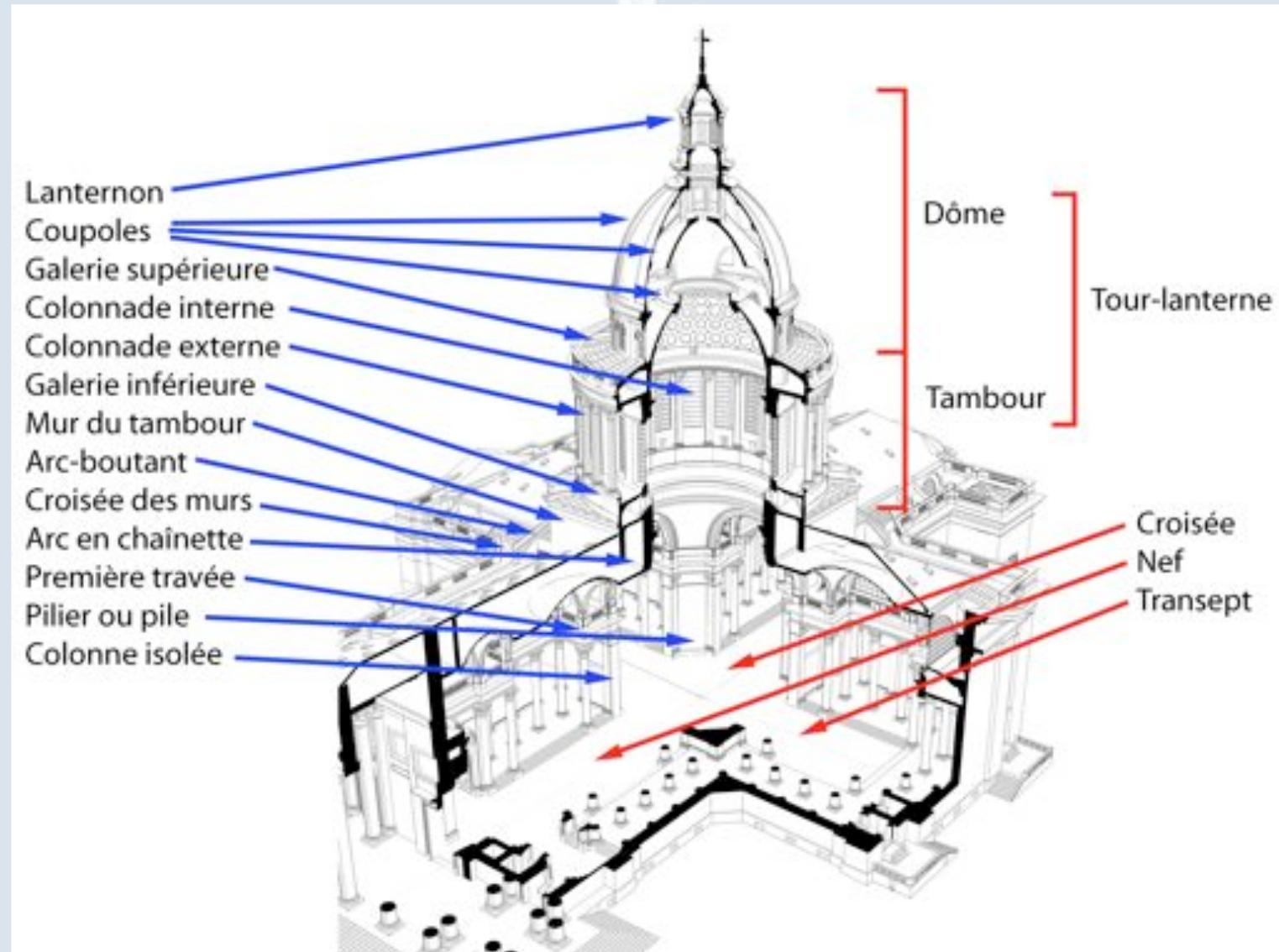
Un exemple complet d'application : le Panthéon

# Le Panthéon : historique

- Construit entre 1758 et 1790 par Soufflot et Rondelet
- 110 mètres de long, 85 de large, 85 de haut
- Dôme de trois coupoles superposées en maçonnerie sans aucune charpente surmonté d'un lanternon
- Edifice en pierre armée : utilisation massive d'éléments métalliques de liaison
- Des désordres structurels précoces, dès la construction : débats, querelles d'experts (Rondelet, Perronet, Gauthey,...)

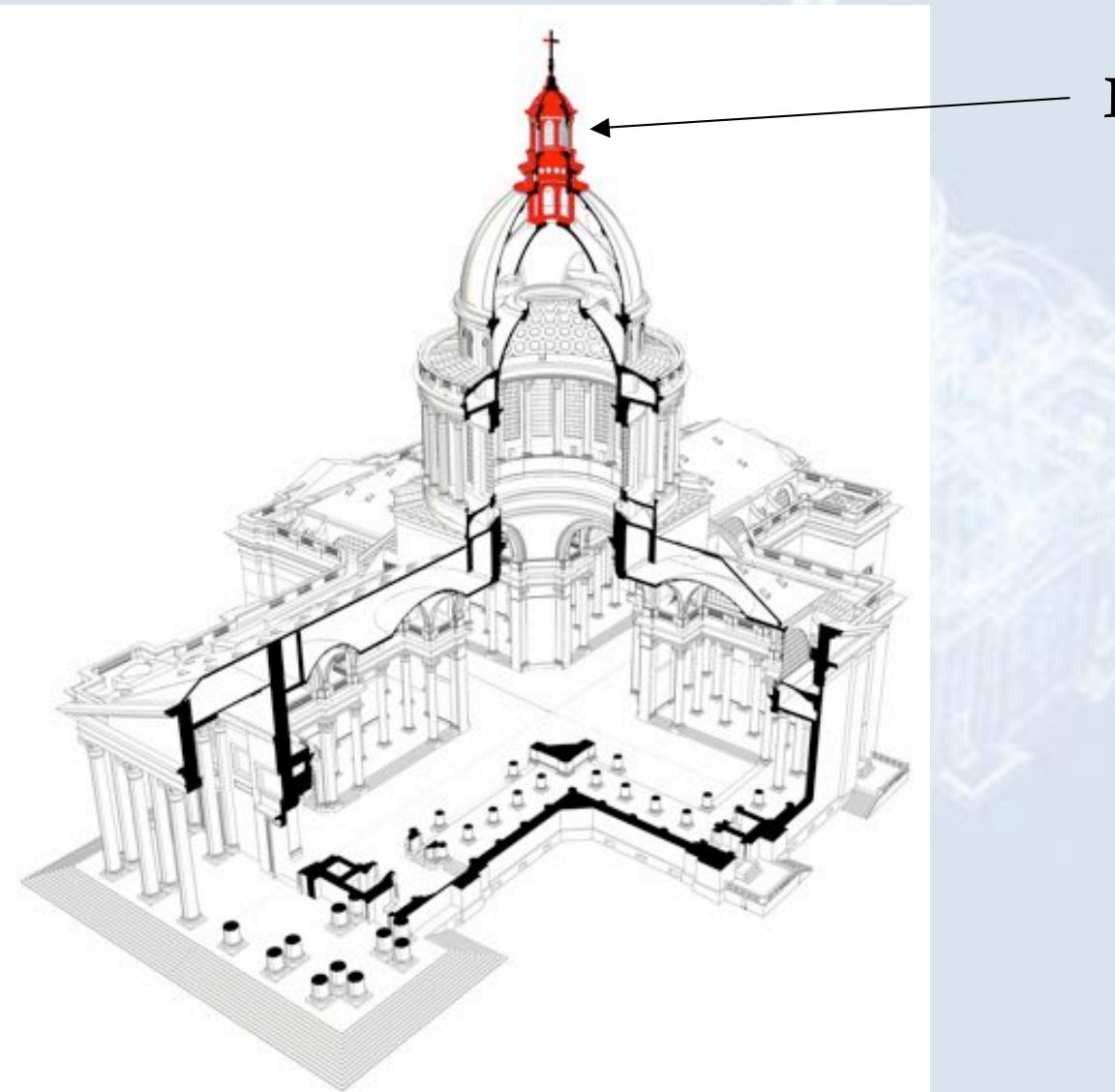
Un exemple complet d'application : le Panthéon

# Le Panthéon : vocabulaire



Un exemple complet d'application : le Panthéon

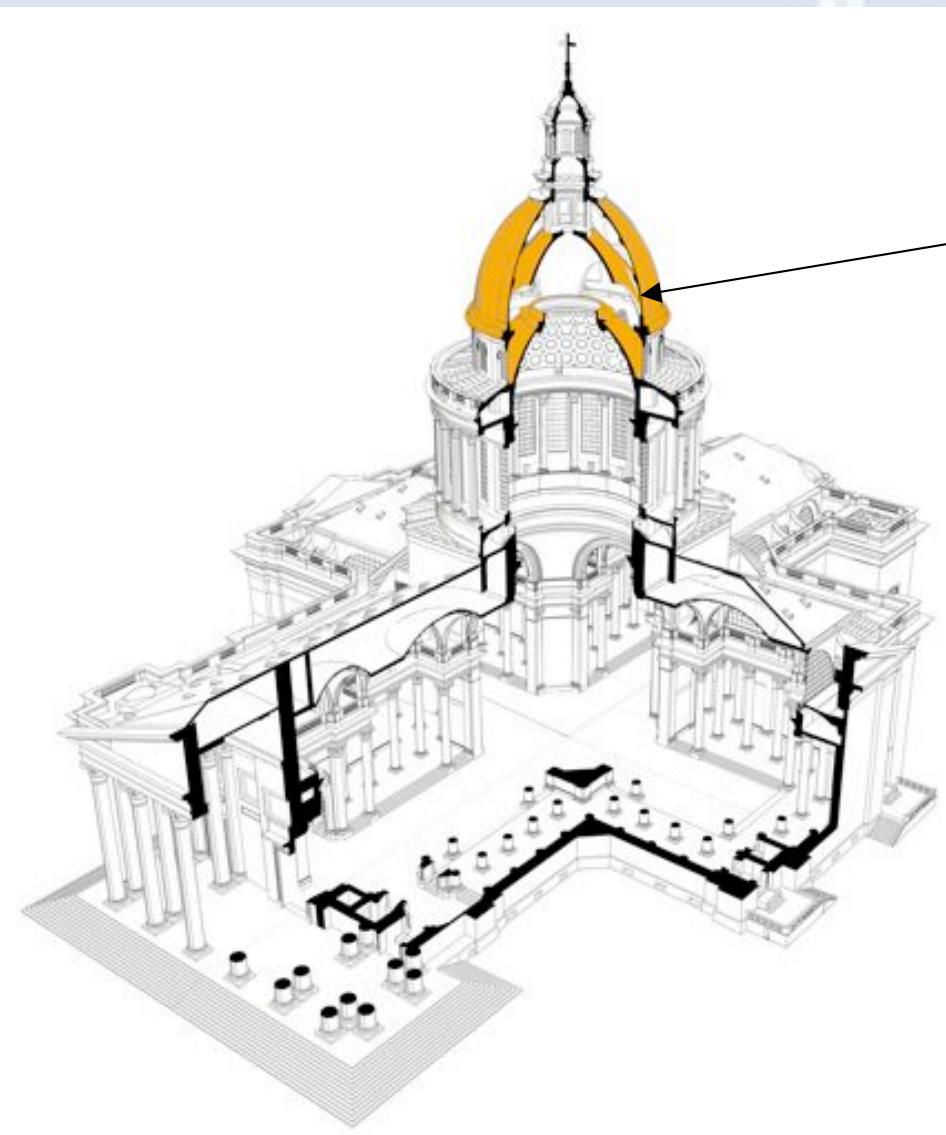
# Le Panthéon : éléments structurels du dôme



Lanternon

Un exemple complet d'application : le Panthéon

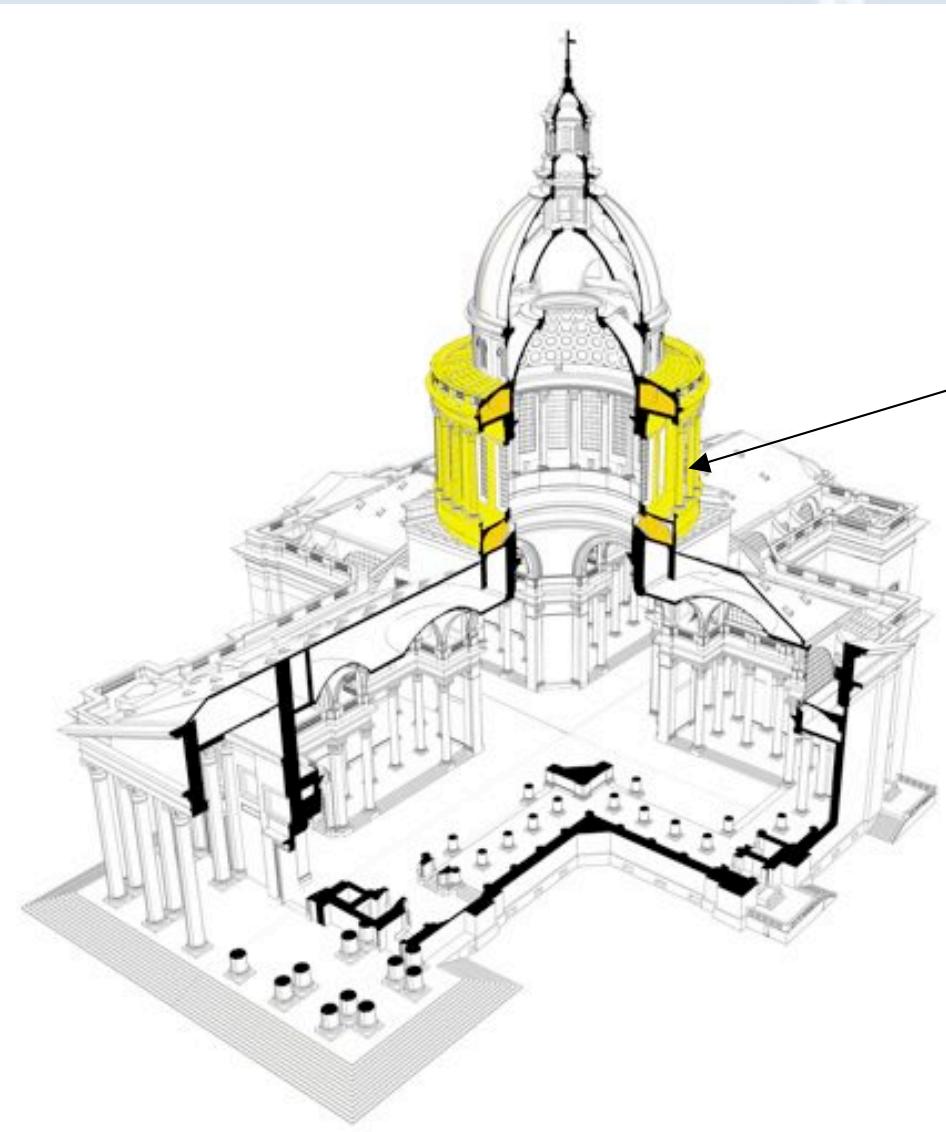
# Le Panthéon : éléments structurels du dôme



Coupoles

Un exemple complet d'application : le Panthéon

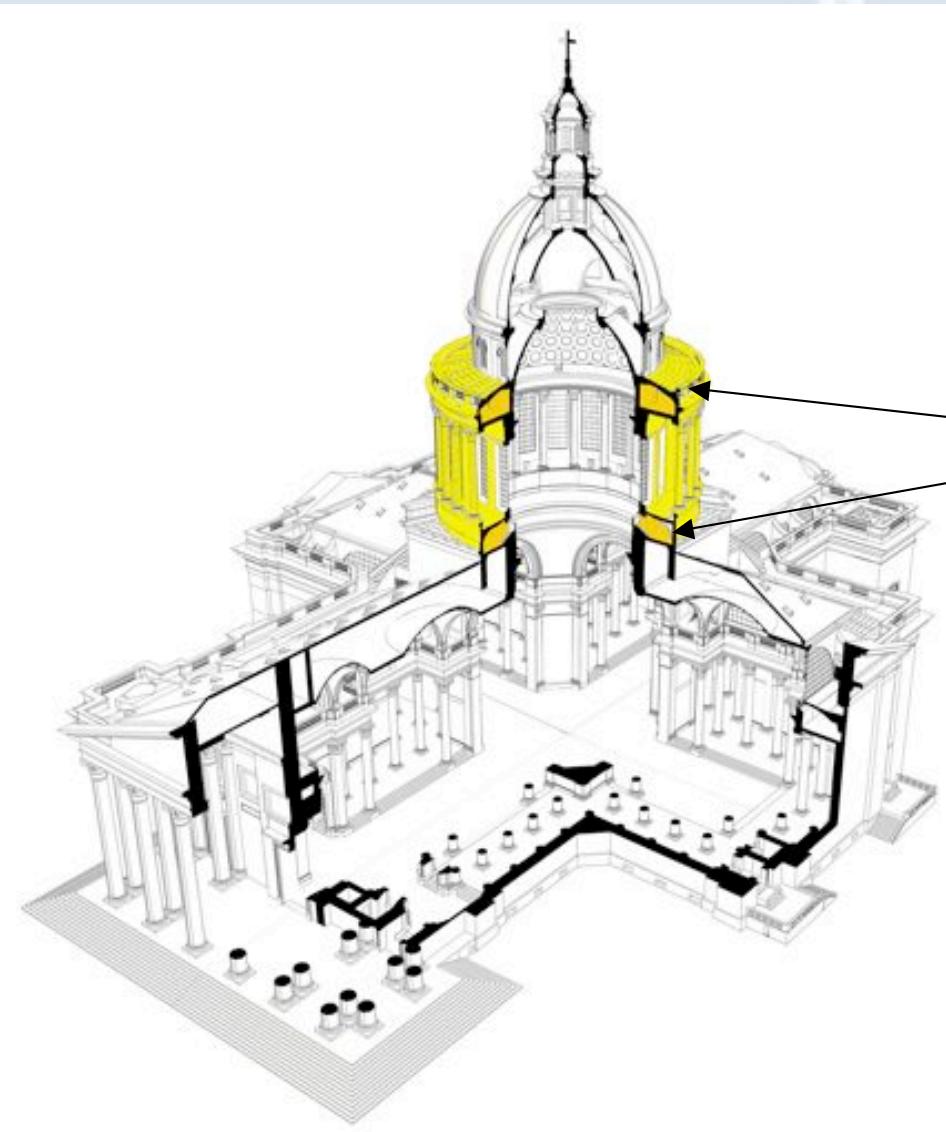
# Le Panthéon : éléments structurels du dôme



Tambour

Un exemple complet d'application : le Panthéon

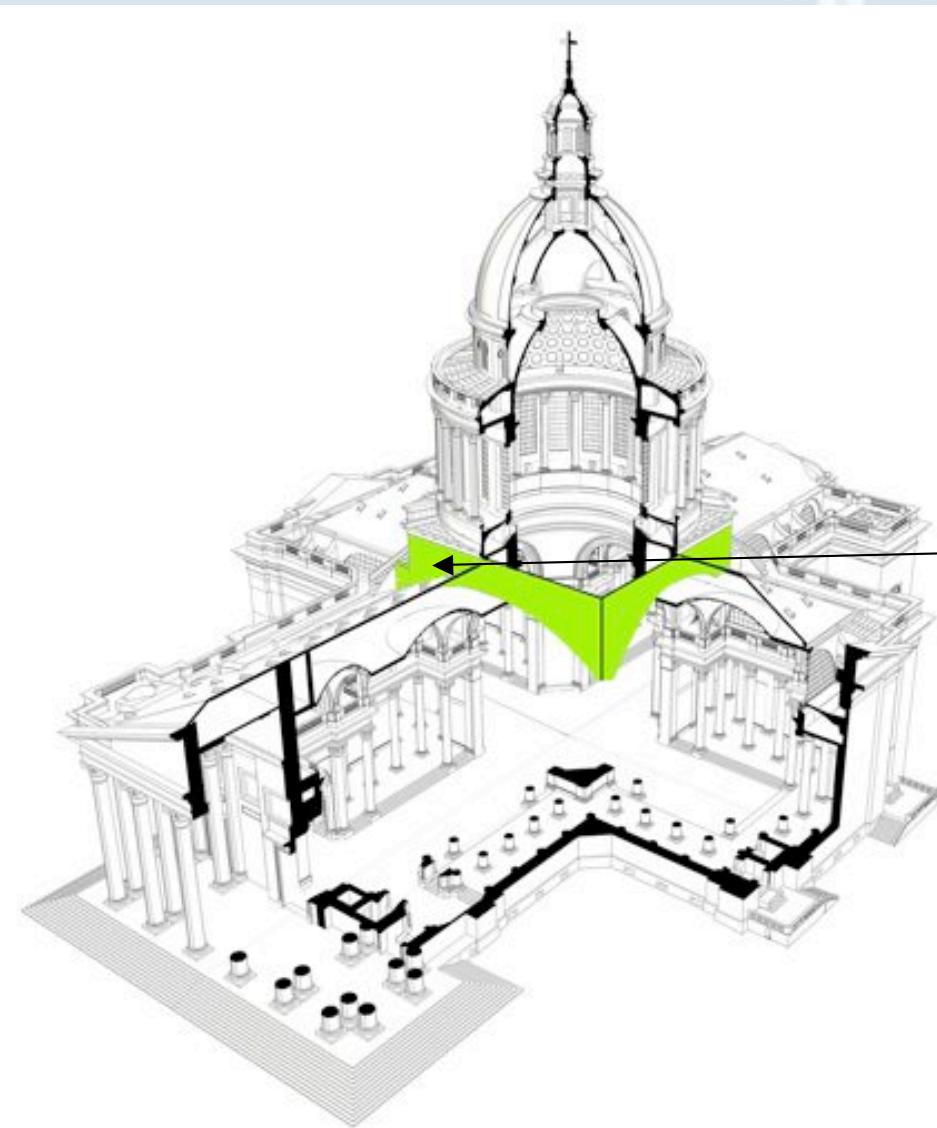
# Le Panthéon : éléments structurels du dôme



Galerie

Un exemple complet d'application : le Panthéon

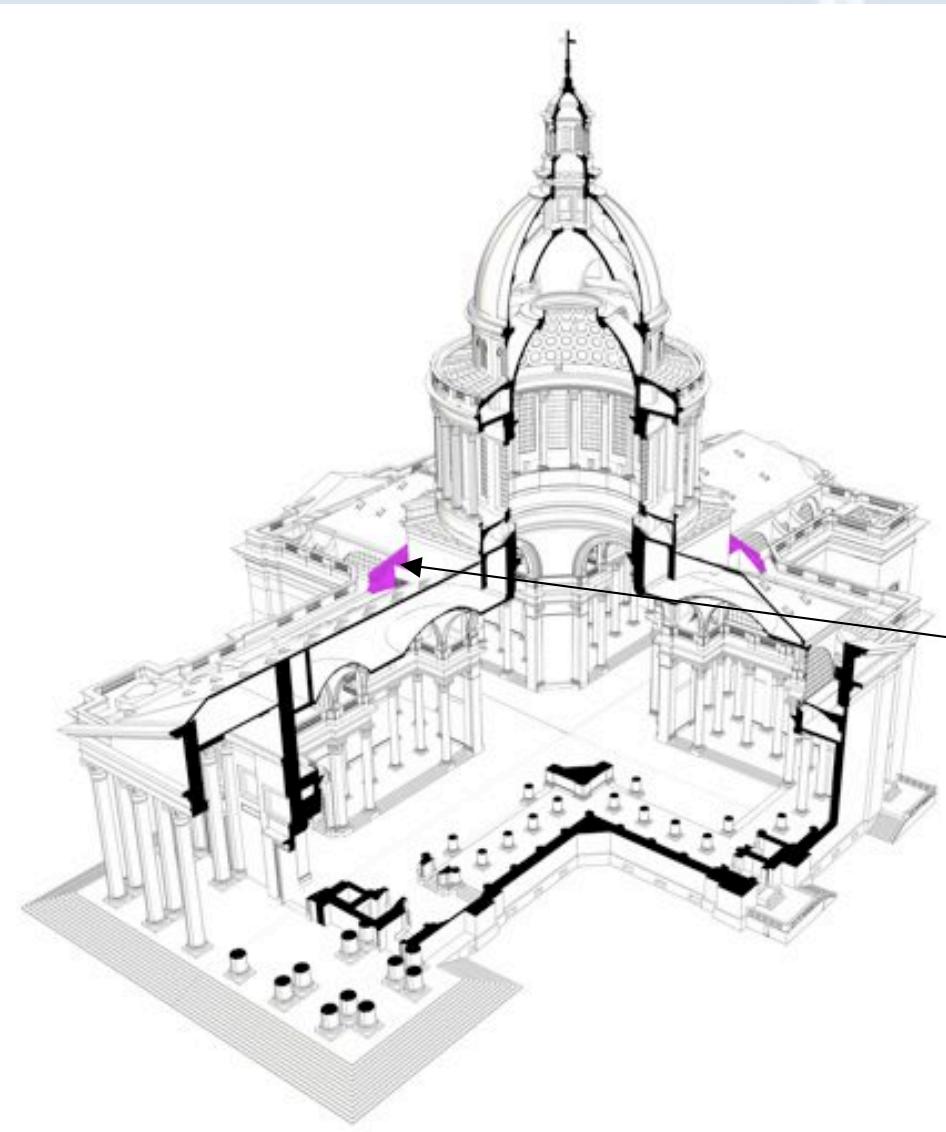
# Le Panthéon : éléments structurels du dôme



Arcs en chaînette

Un exemple complet d'application : le Panthéon

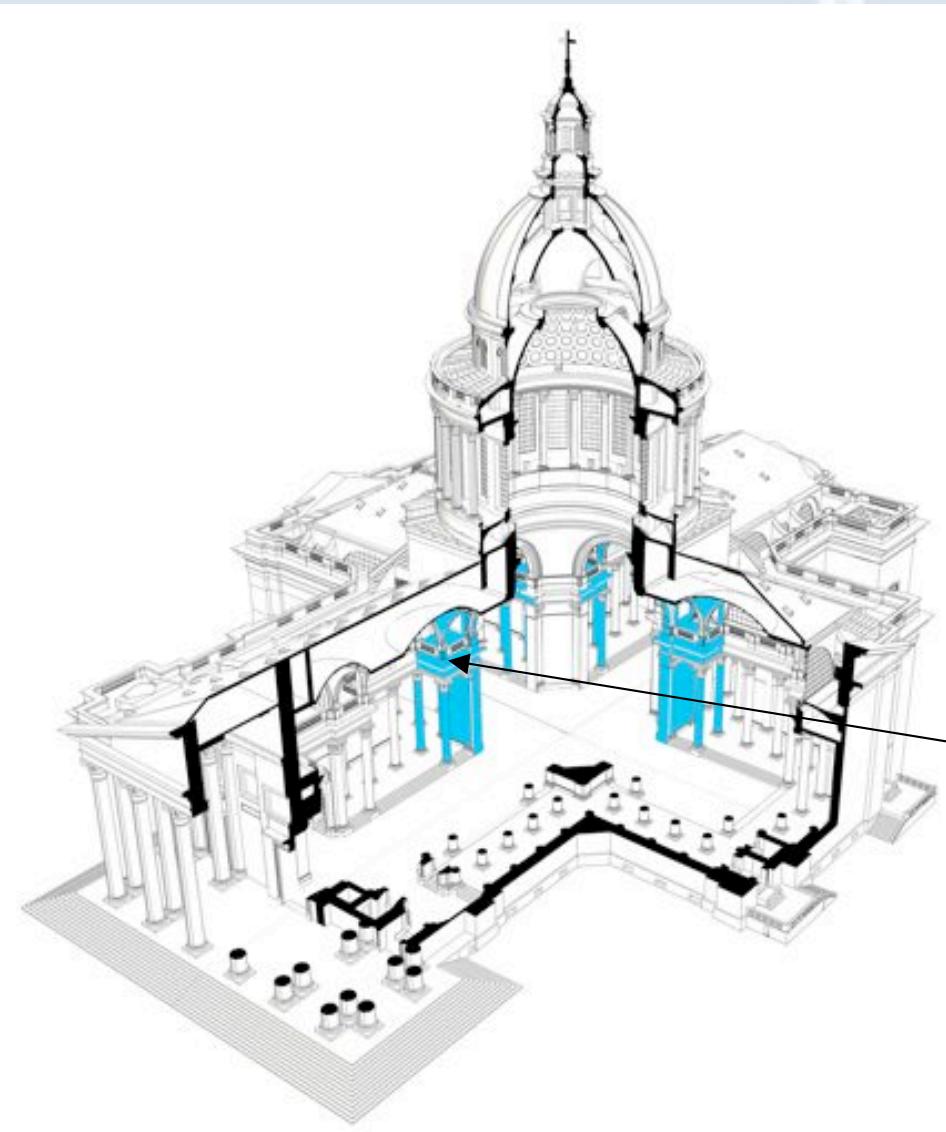
# Le Panthéon : éléments structurels du dôme



Arcs-boutants

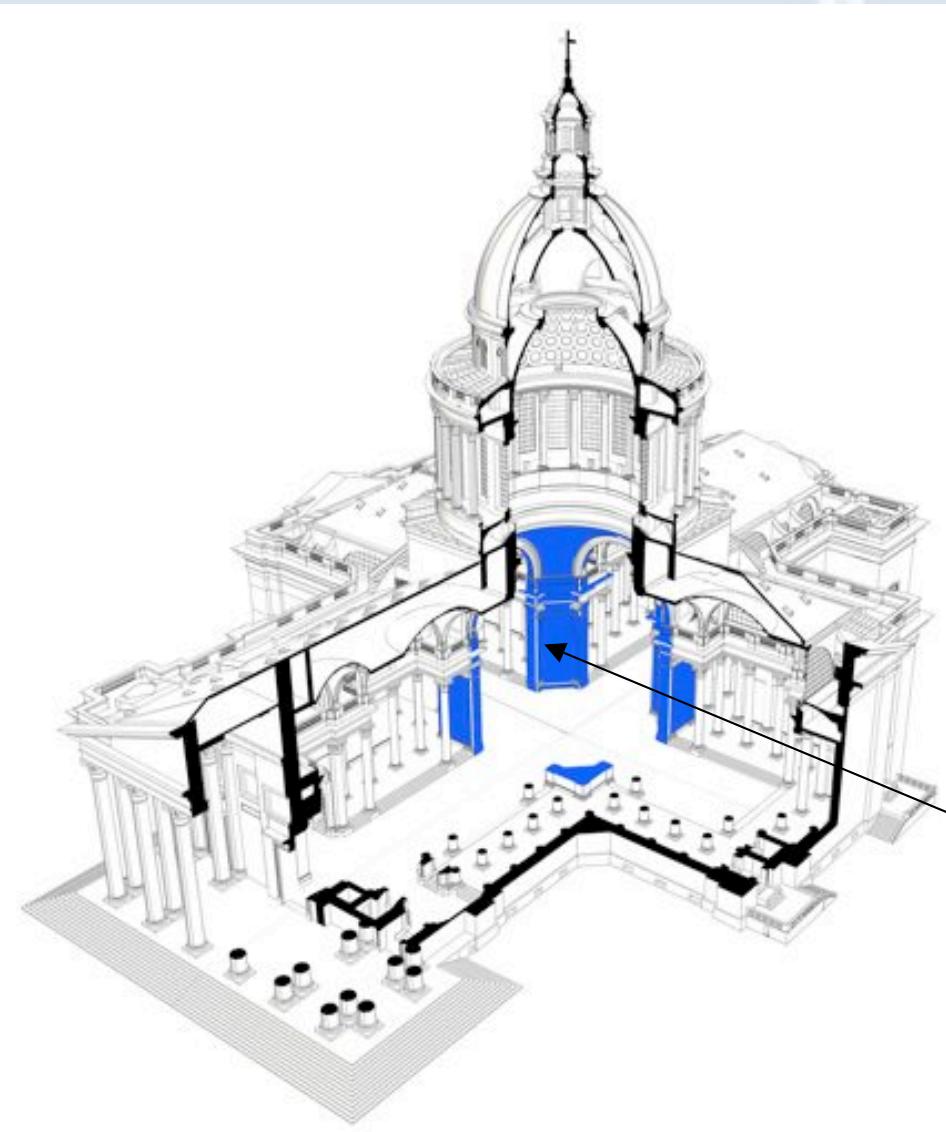
Un exemple complet d'application : le Panthéon

# Le Panthéon : éléments structurels du dôme



Un exemple complet d'application : le Panthéon

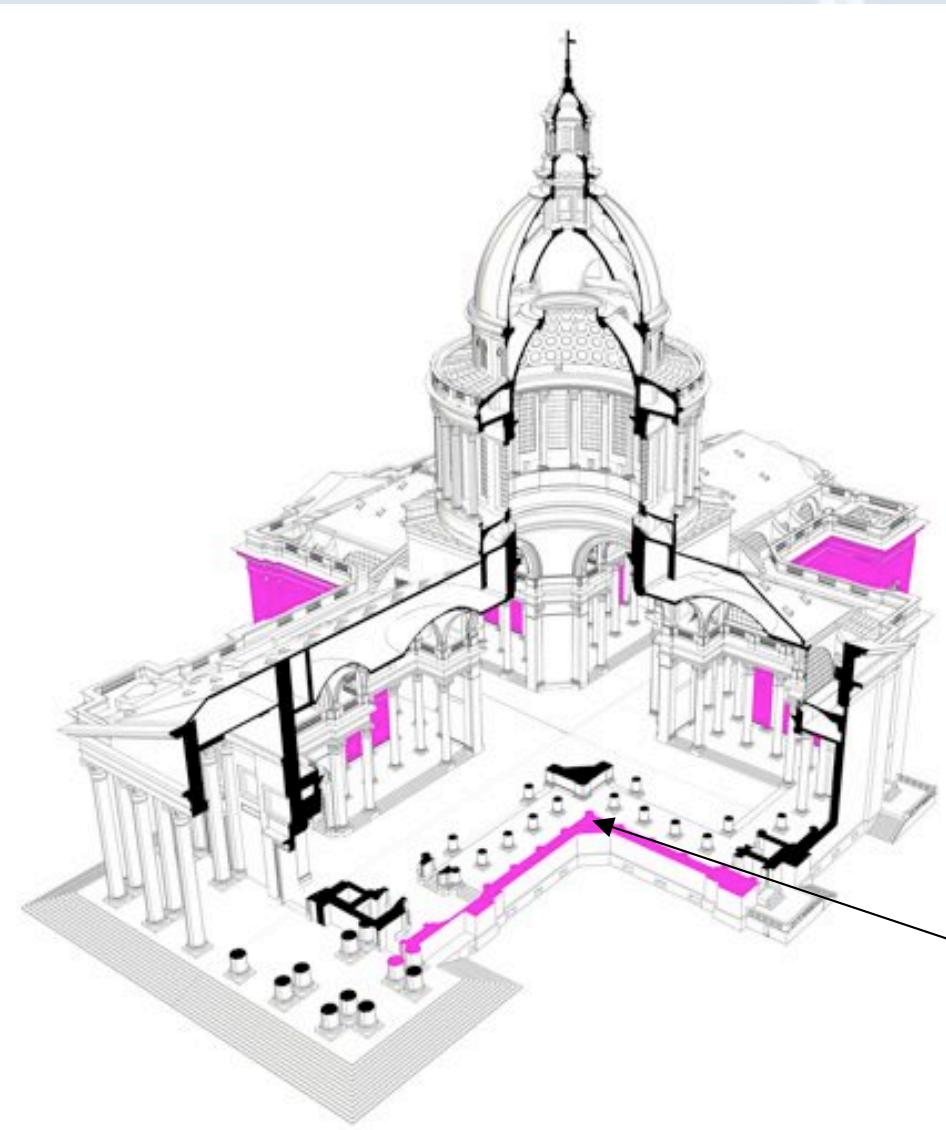
# Le Panthéon : éléments structurels du dôme



Piles de la croisée

Un exemple complet d'application : le Panthéon

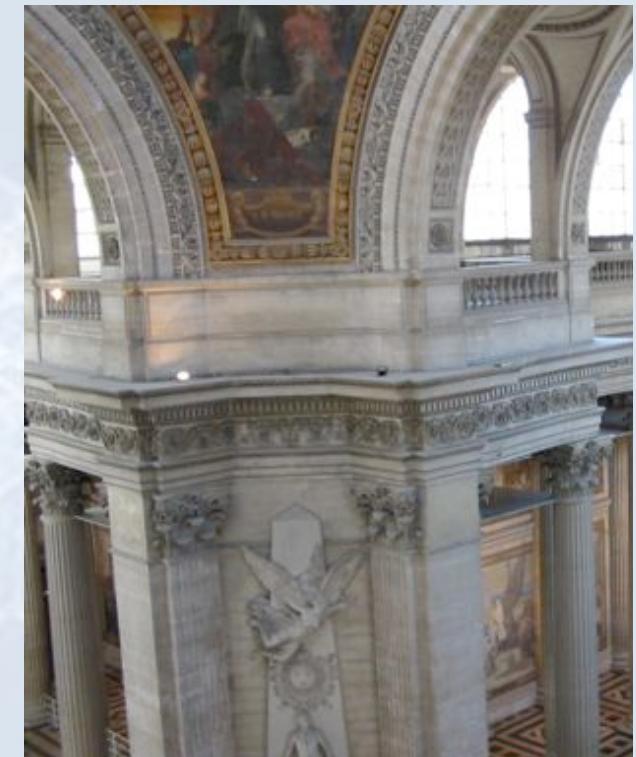
# Le Panthéon : éléments structurels du dôme



Murs périphériques

Un exemple complet d'application : le Panthéon

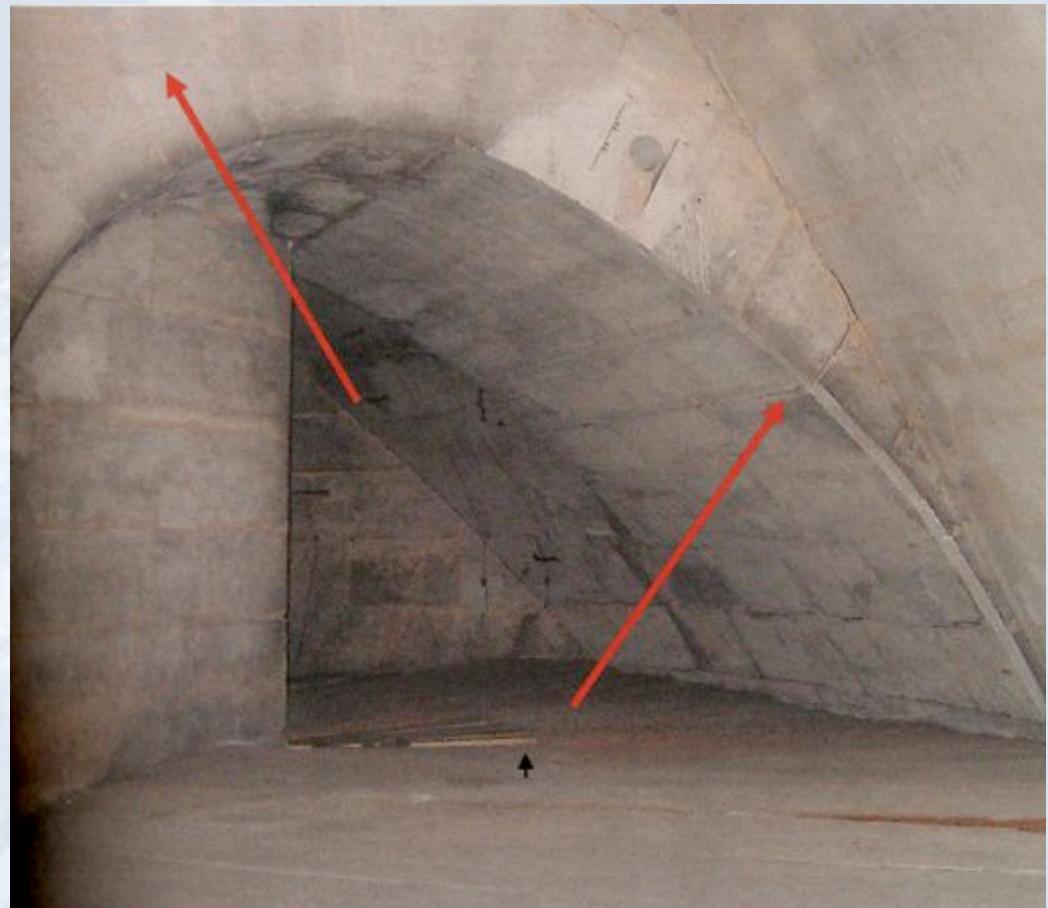
# Choix du massif structurel étudié



DÔME (TROIS COUPOLES), TAMBOUR, PILES

Un exemple complet d'application : le Panthéon

# Choix du massif structurel étudié



## ARCS-BOUTANTS ET MURS

Un exemple complet d'application : le Panthéon

# Choix du massif structurel étudié



**PREMIERES TRAVEES ET ARCS EN CHAINETTE**

Un exemple complet d'application : le Panthéon

# Choix du massif structurel étudié

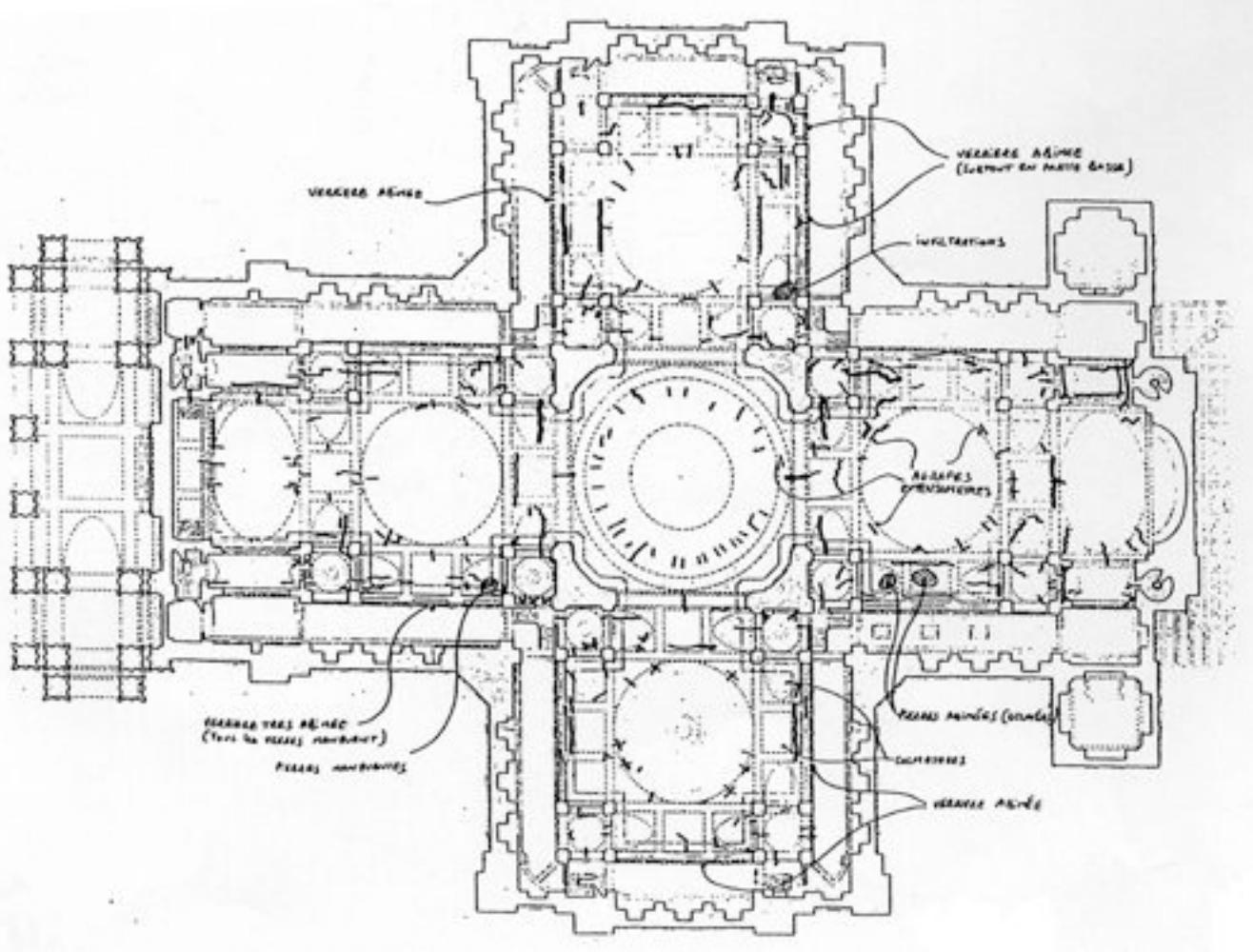


- Indépendance structurelle entre le massif du dôme et les bras de la croix.
- Nécessité de prendre en compte les premières travées et les arcs-boutants.
- Modélisation fine des transitions impérative.

**COMPROMIS A ARBITRER :**  
**TAILLE DU MAILLAGE/PERTINENCE STRUCTURELLE**

Un exemple complet d'application : le Panthéon

# Désordres constatés



- Nombreux désordres constatés
  - Fissurations symétriques
  - Eclatement et chutes de pierres dans le vaisseau central

## Un exemple complet d'application : le Panthéon

## Désordres constatés

PANTHÉON



Phénomènes de vieillissement des élts métalliques : foisonnement

Un exemple complet d'application : le Panthéon

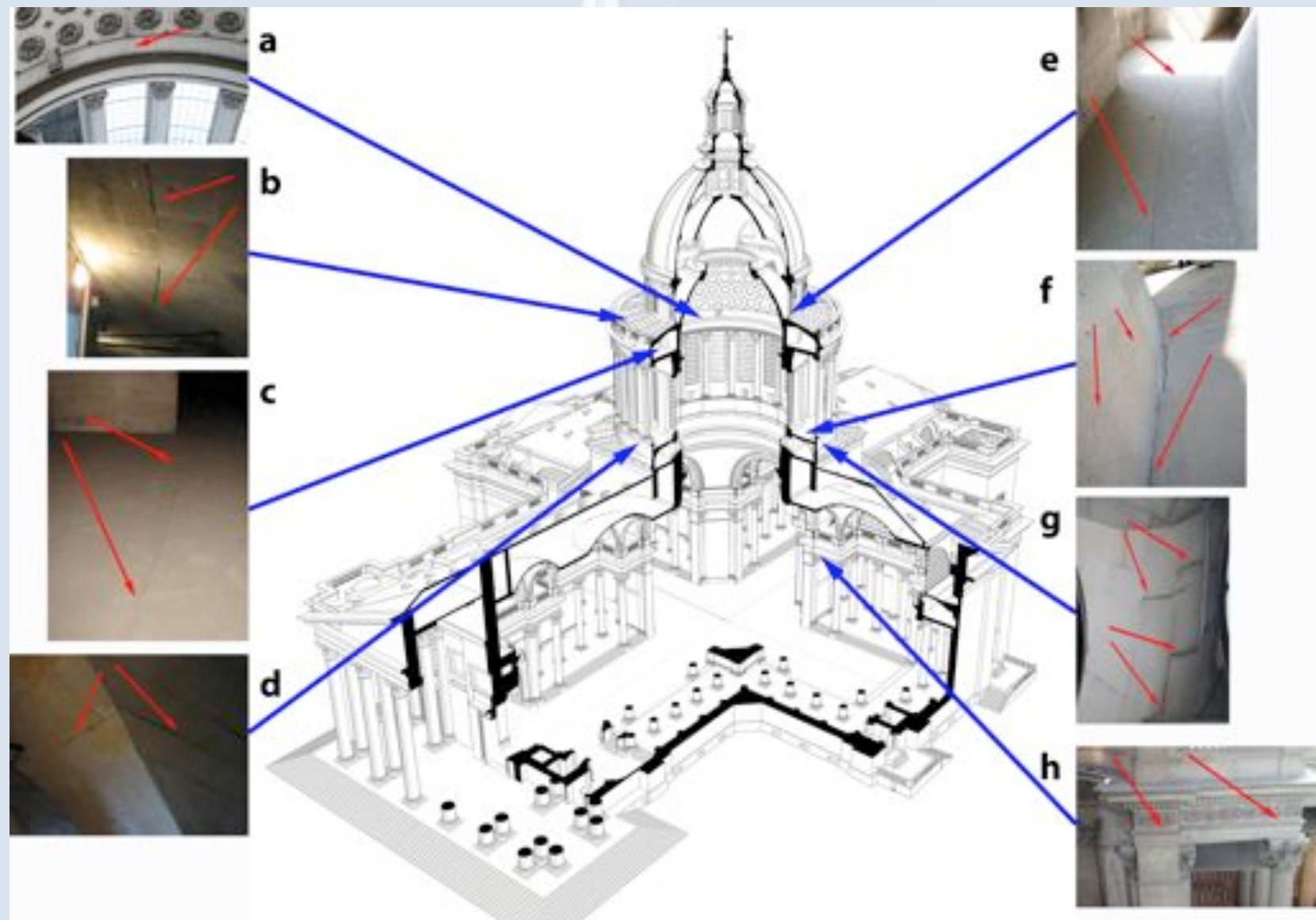
## Désordres constatés

Rigidification des maçonneries par les agrafes : fragilité en traction



Un exemple complet d'application : le Panthéon

# Désordres constatés dans le massif retenu



# Désordres constatés dans le massif retenu

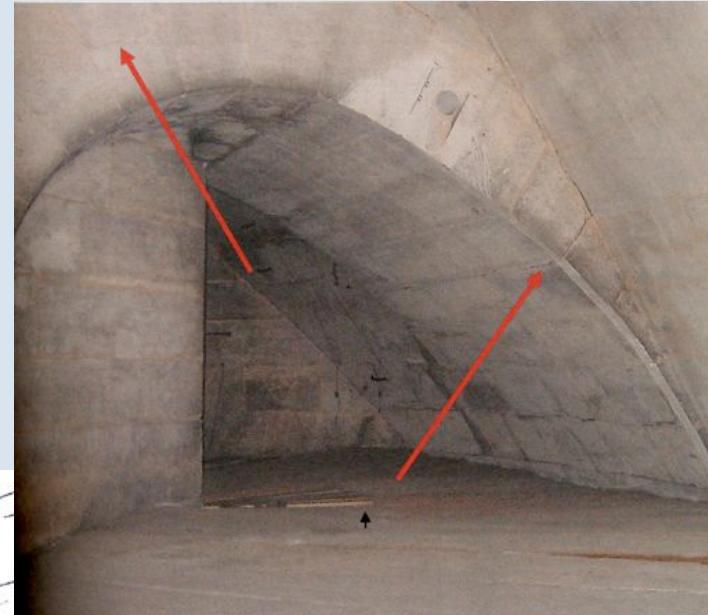


- **Mouvements de terrain et enfoncement des fondations historiquement avérés.**
- **Tassement quasiment uniforme des piles.**
- **Rupture des architraves de la nef.**
- **Désordres dans les arcs des premières travées.**

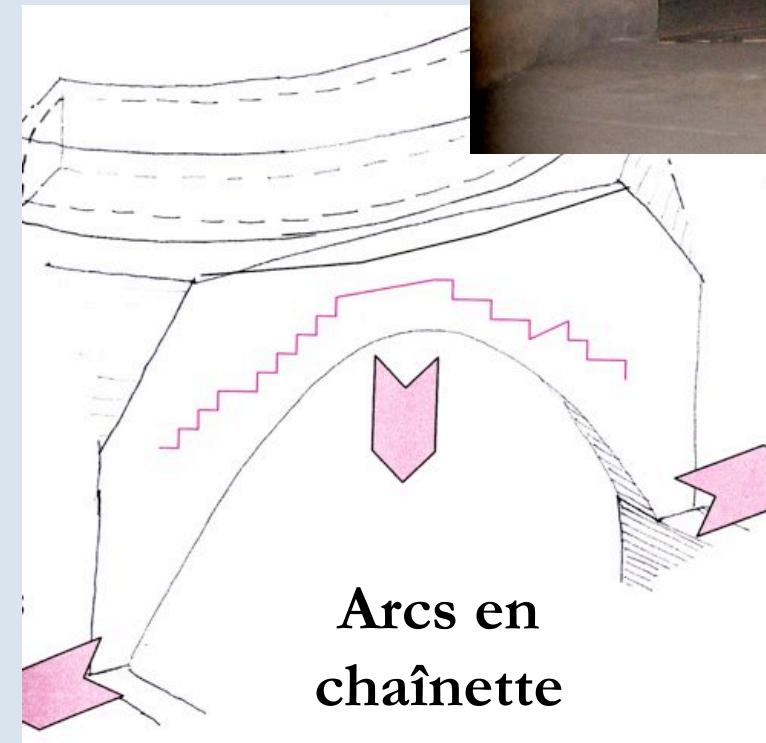
Un exemple complet d'application : le Panthéon

# Désordres constatés dans le massif retenu

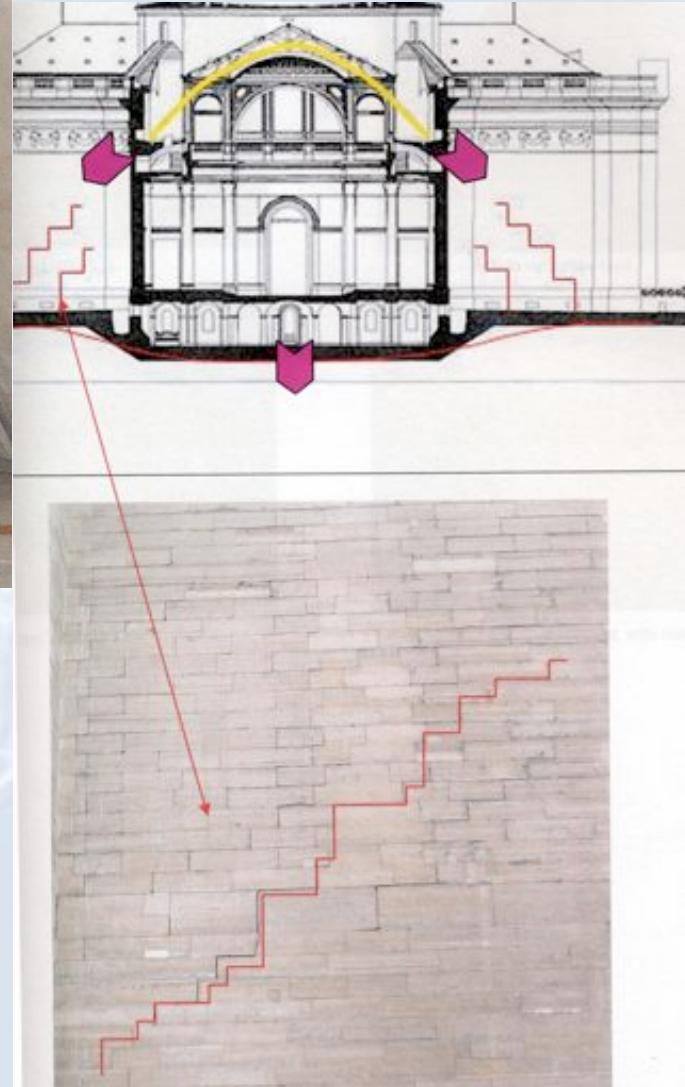
**Arcs-boutant**



**Arcs en chaînette**



**Murs**



Un exemple complet d'application : le Panthéon

# Désordres constatés dans le massif retenu

## FISSURES ACTIVES DANS LES GALERIES DU TAMBOUR



Murs voûtés et plafond

Fissures orientées à 45°

Un exemple complet d'application : le Panthéon

# Désordres constatés dans le massif retenu

## FISSURES ACTIVES DANS LES GALERIES DU TAMBOUR



Sol des galeries et  
base des coupoles  
  
Fissure circulaire

Un exemple complet d'application : le Panthéon

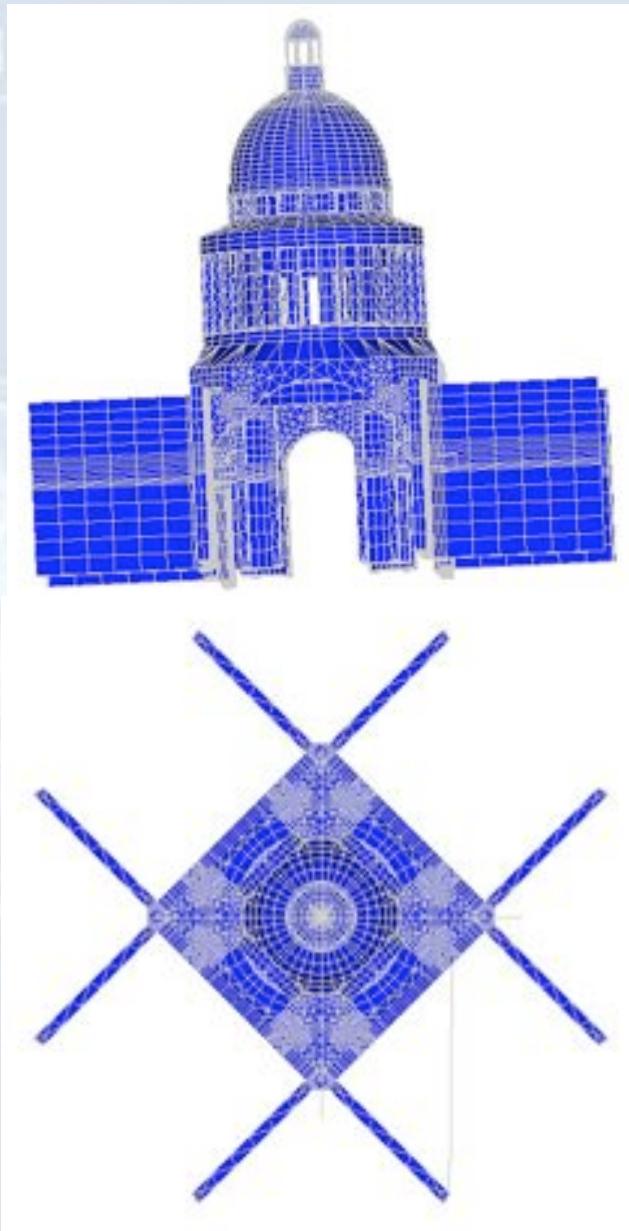
## Hypothèse retenue

PANTHÉON

- **Tassement quasiment uniforme des quatre piles triangulaires de la croisée de 10 cm environ par rapport aux autres éléments d'appuis (colonnes, murs,...).**
- **Décalage « vertical » entre deux systèmes d'appui de l'édifice à la suite de ces enfoncements.**
- **Désordres dans les éléments de liaison et de transmission des charges entre ces deux systèmes.**
- **Simulation numérique d'un tassement des piles pour tenter de reproduire les désordres observés.**

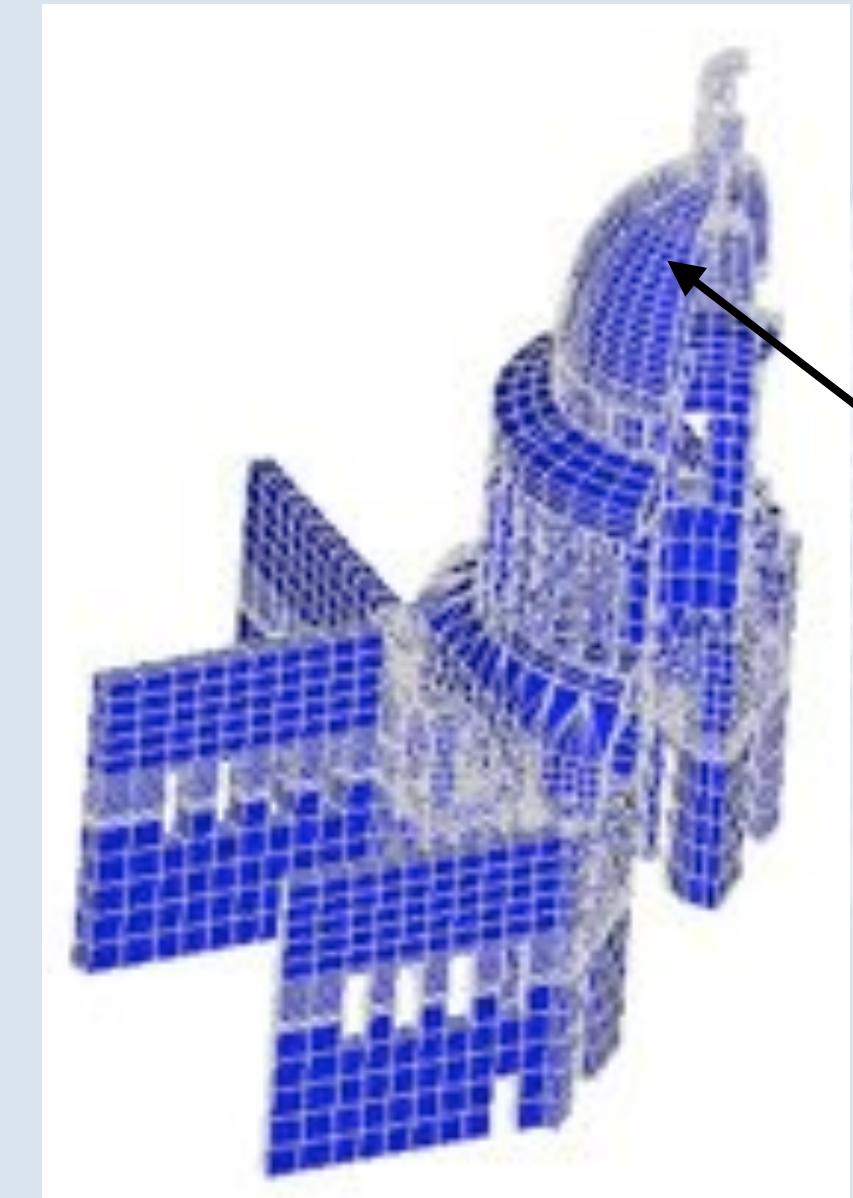
Un exemple complet d'application : le Panthéon

## Maillage adopté



Un exemple complet d'application : le Panthéon

## Maillage adopté



## PANTHÉON

- 17 000 éléments / 21 000 nœuds
- Analyse sur une moitié (symétrie)  
: 1/4 possible mais pas souhaitable  
(perturbations)

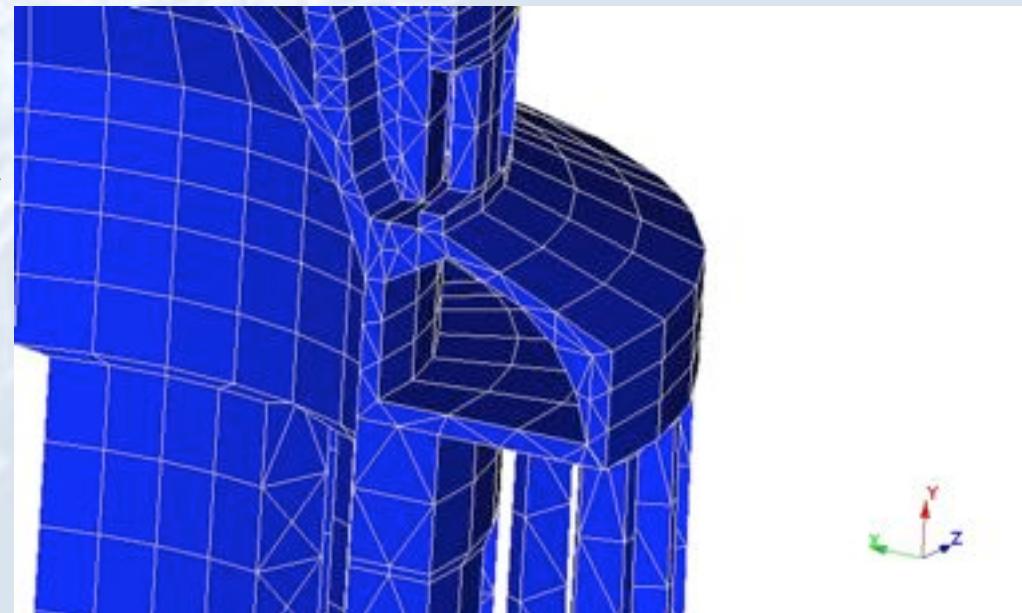
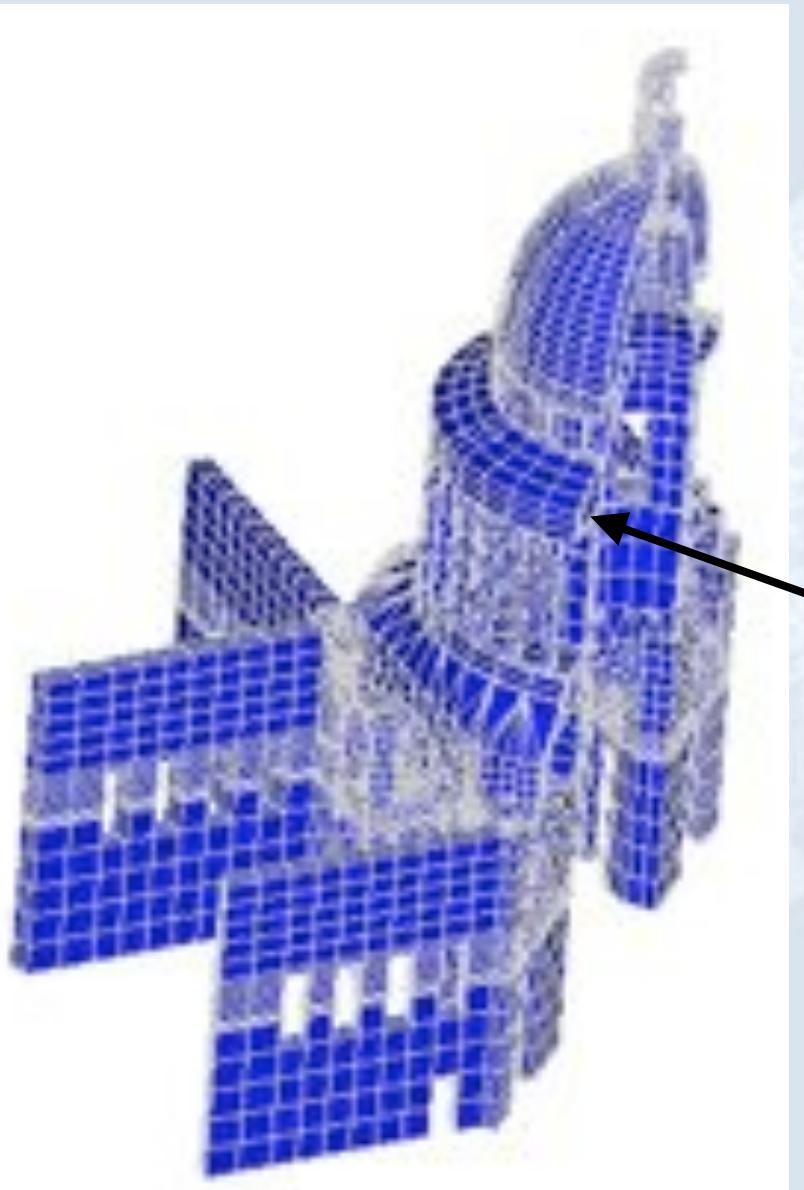


Un exemple complet d'application : le Panthéon

## Maillage adopté

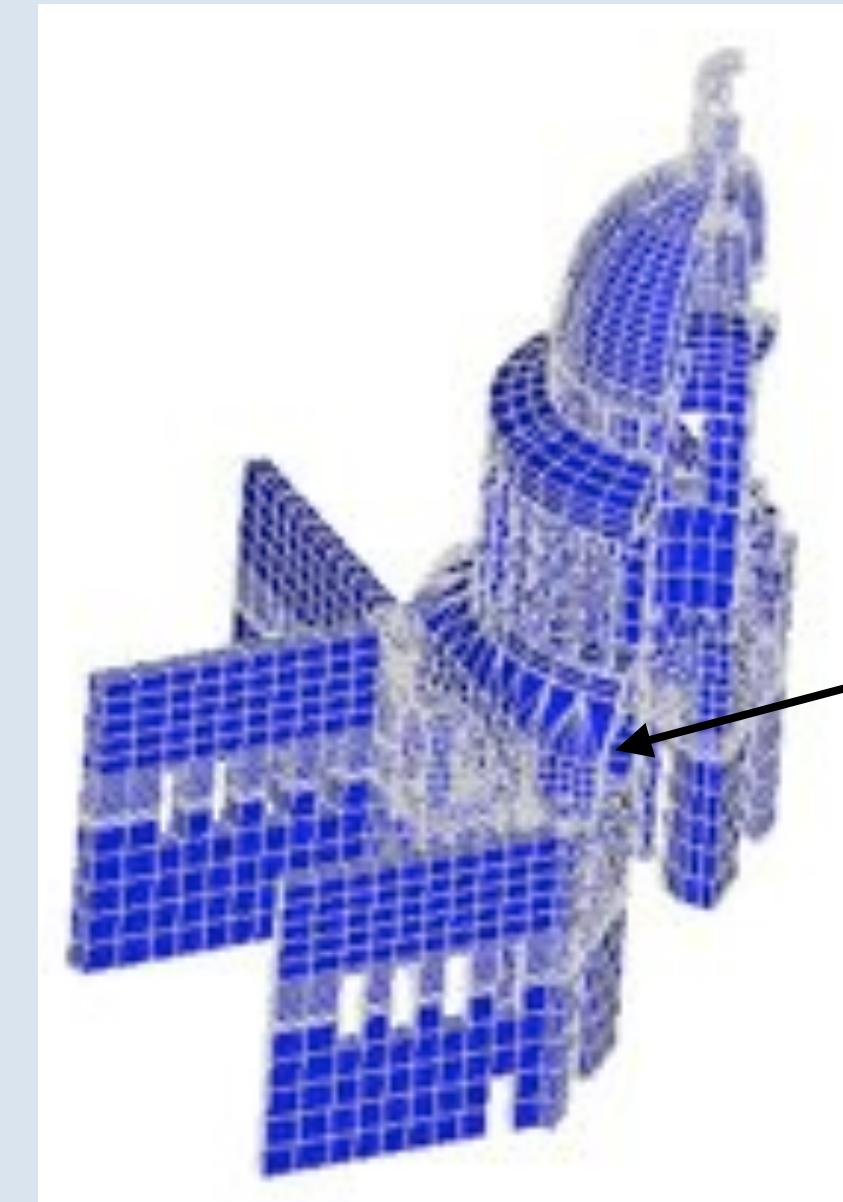
PANTHÉON

- 17 000 éléments / 21 000 nœuds
- Analyse sur une moitié (symétrie)  
: 1/4 possible mais pas souhaitable  
(perturbations)



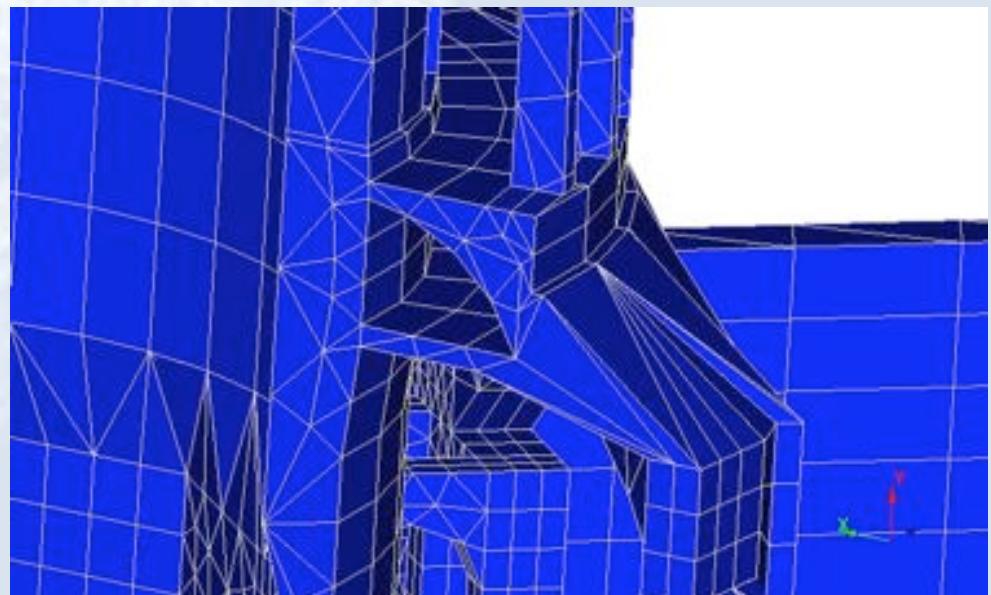
Un exemple complet d'application : le Panthéon

## Maillage adopté



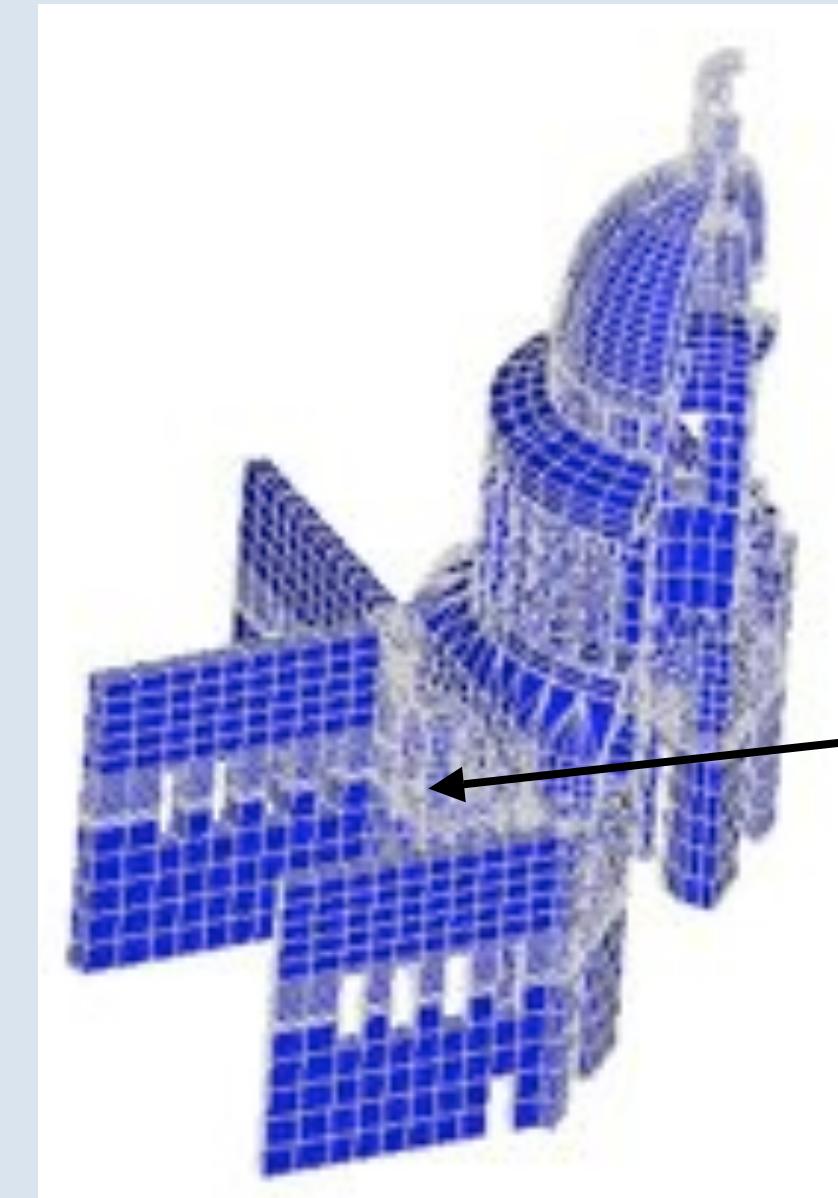
## PANTHÉON

- 17 000 éléments / 21 000 nœuds
- Analyse sur une moitié (symétrie)  
: 1/4 possible mais pas souhaitable  
(perturbations)



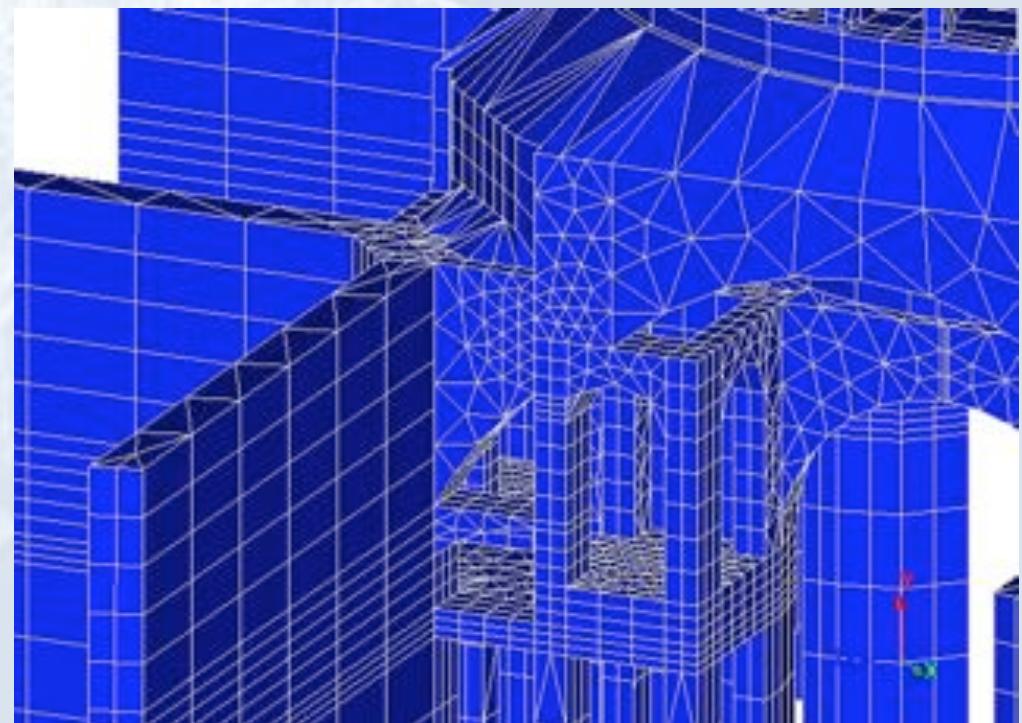
Un exemple complet d'application : le Panthéon

## Maillage adopté



## PANTHÉON

- 17 000 éléments / 21 000 nœuds
- Analyse sur une moitié (symétrie)  
: 1/4 possible mais pas souhaitable  
(perturbations)

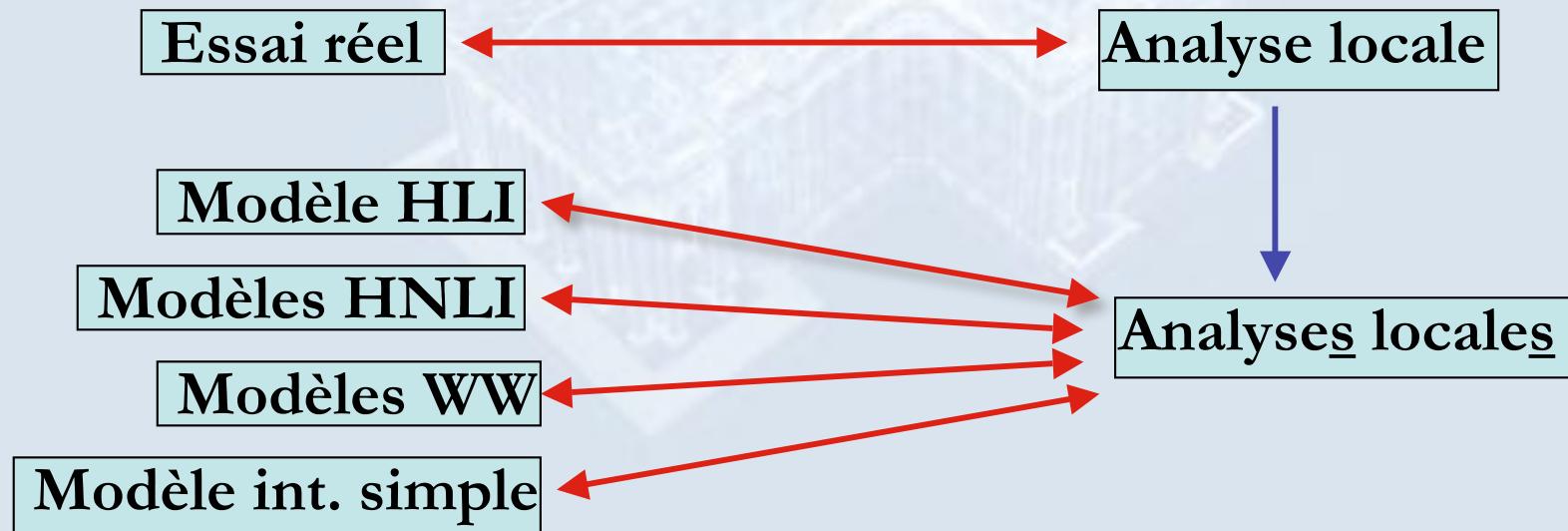


Un exemple complet d'application : le Panthéon

# Calibration des modèles

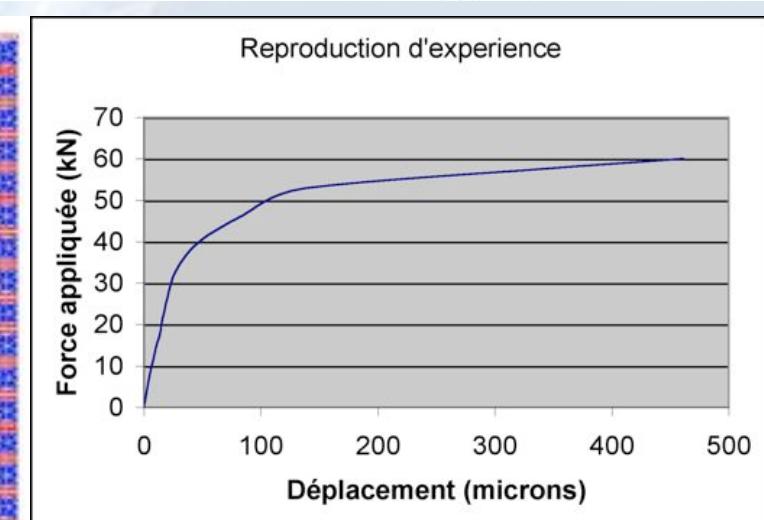
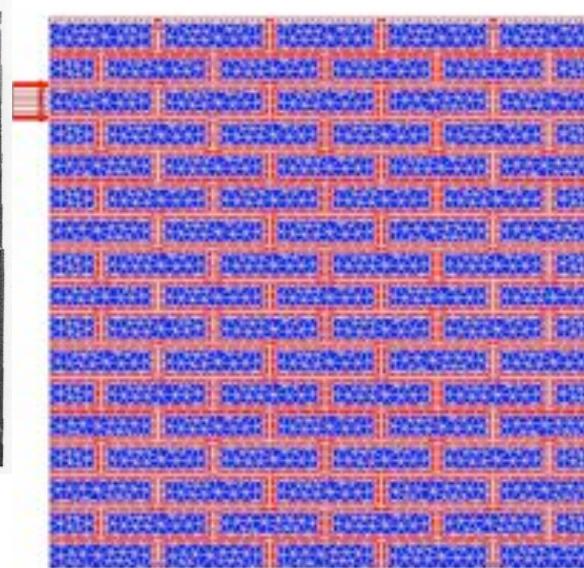
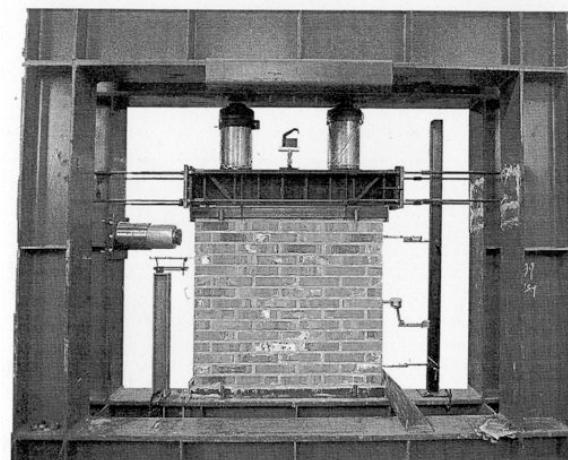
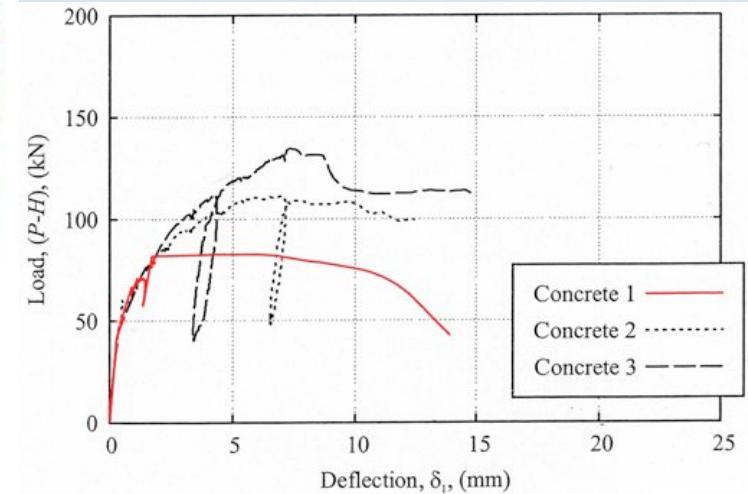
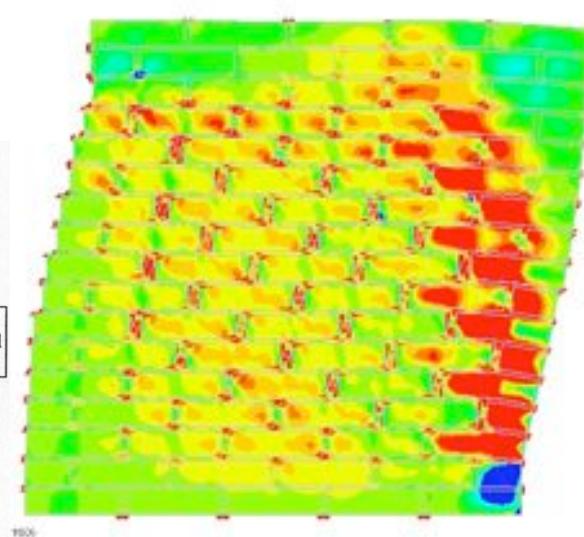
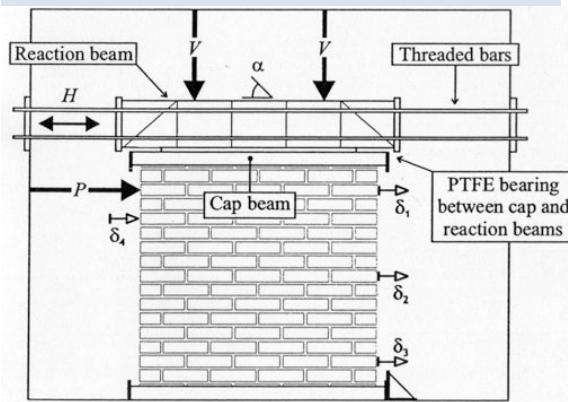
PANTHÉON

- Pour une structure de cette taille : analyse globale obligatoire
- Emploi d'un modèle isotrope homogénéisé : lequel ?
- Objectif : coller au comportement réel de la maçonnerie  
⇒ Calibration des paramètres (ici, en deux temps)



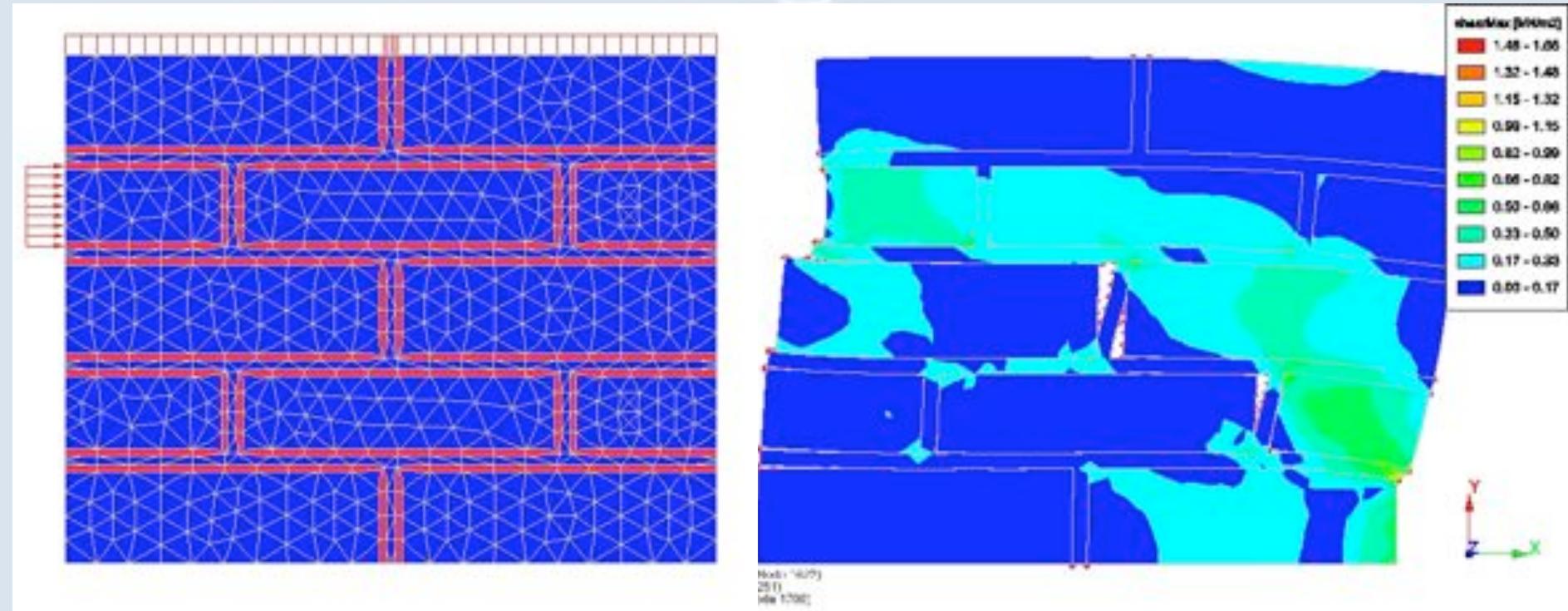
Un exemple complet d'application : le Panthéon

# Essai réel $\longleftrightarrow$ Analyse locale



Un exemple complet d'application : le Panthéon

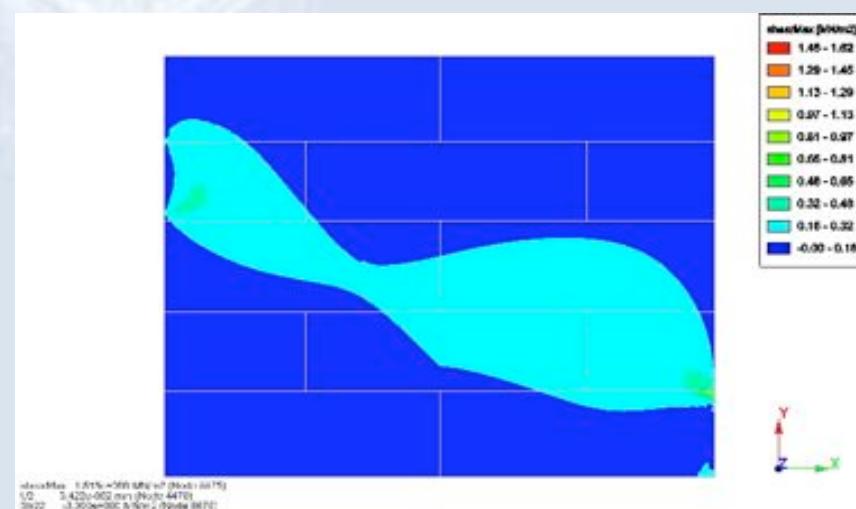
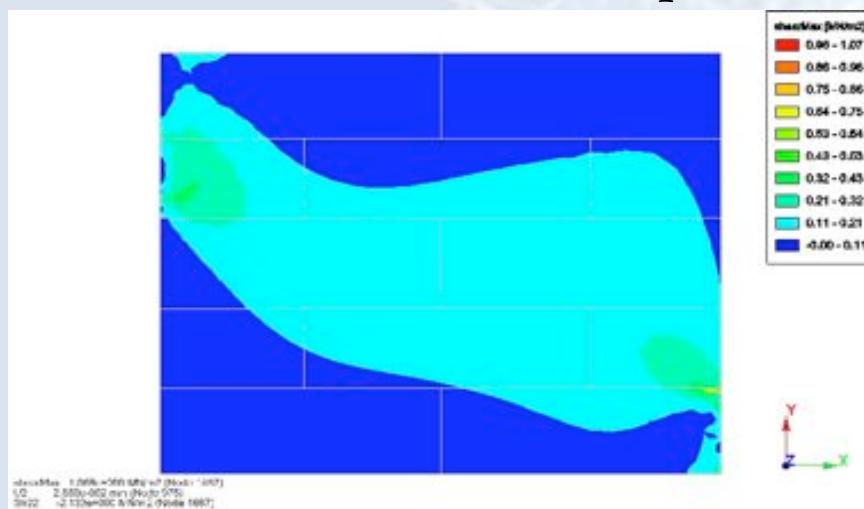
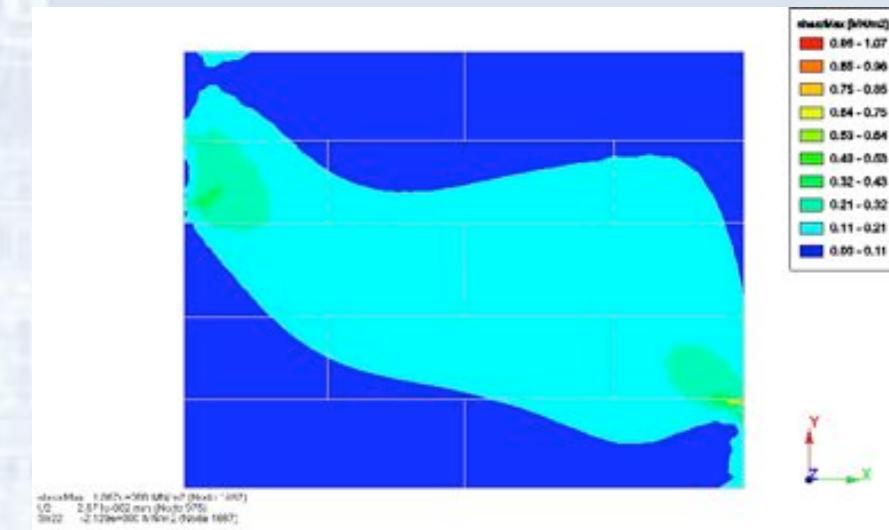
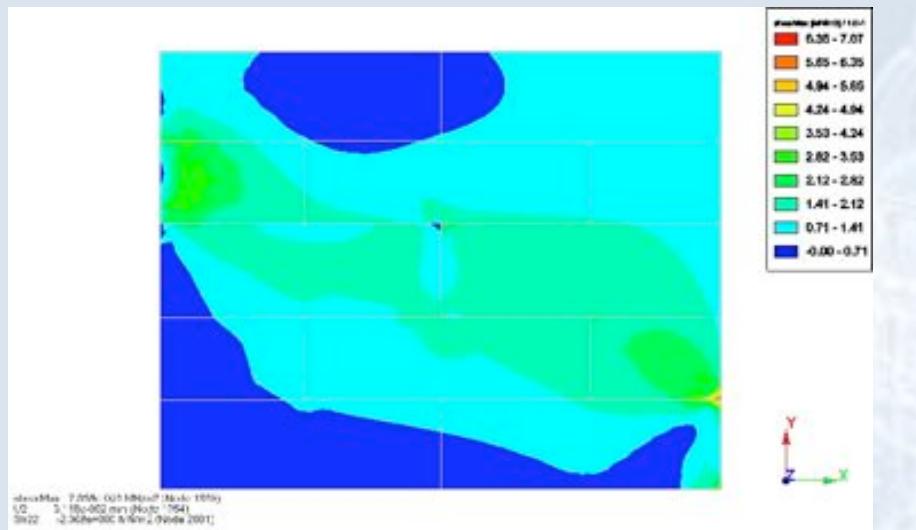
# Analyse locale ↔ Analyse globale



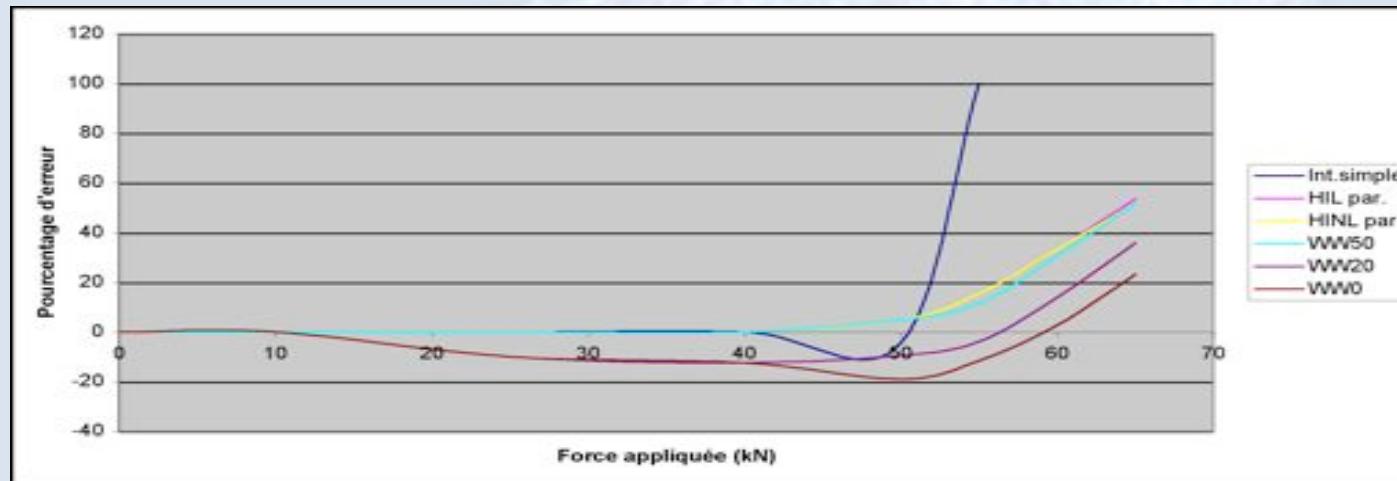
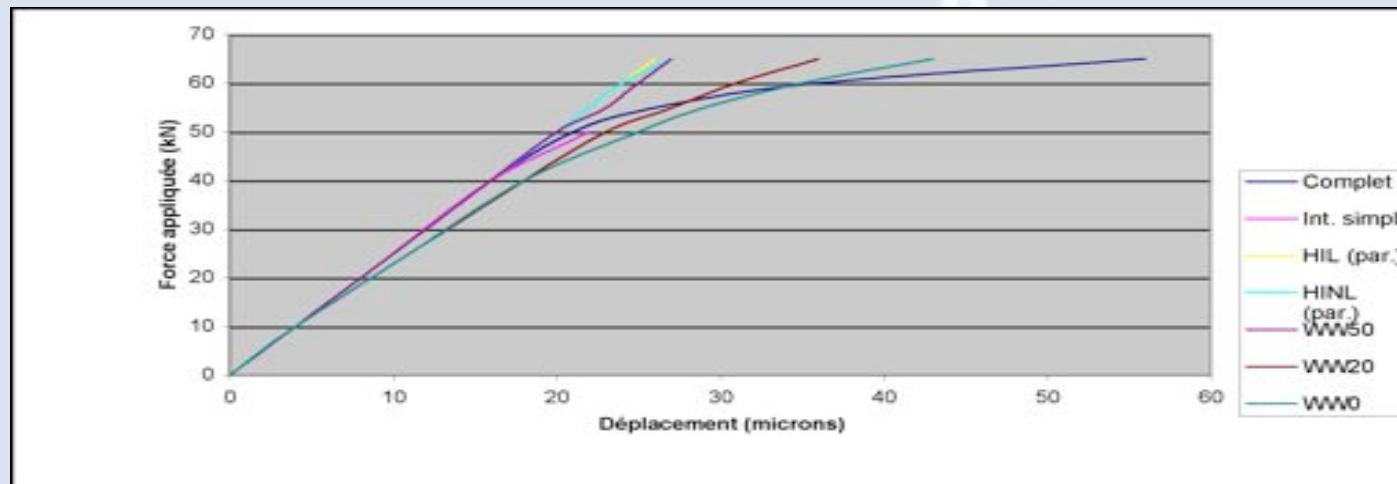
- Exemple sur un panneau (aussi sur pilier, voûtes,...)
- Analyse locale comme témoin
- Comparaison avec d'autres modèles dont on calibre les paramètres

Un exemple complet d'application : le Panthéon

# Analyse locale $\longleftrightarrow$ Analyse globale



# Analyse locale $\longleftrightarrow$ Analyse globale



Relier des paramètres globaux (déplacement en bas et contrainte au milieu)

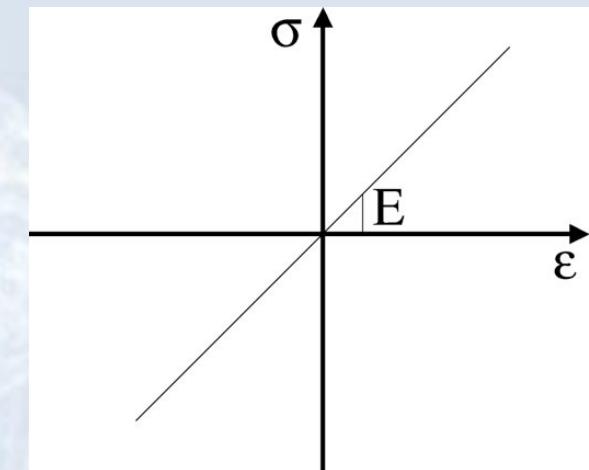
Contrainte (kPa)	Témoin	Int. simple	HIL	HINL	WW50	WW20	WW0
Compression	329	297	275	325	325	352	353
Cisaillement	182	151	150	150	151	174	176

## Modèles adoptés

PANTHÉON

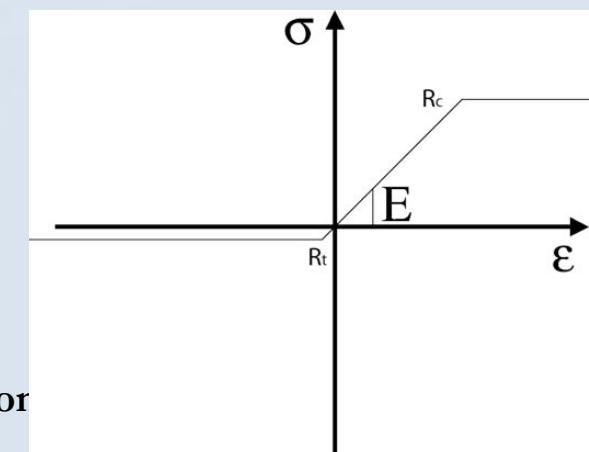
- Modèle homogène linéaire isotrope (homogénéisation harmonique).

- $\rho = 2,2 \text{ t/m}^3$
- $E = 12 \text{ GPa}$
- $\nu = 0,3$



- Modèle homogène isotrope non-linéaire à critère de William-Warnke.

- $R_t = 100 \text{ kPa}$
- $R_c = 10 \text{ MPa}$



Un exemple cor

n

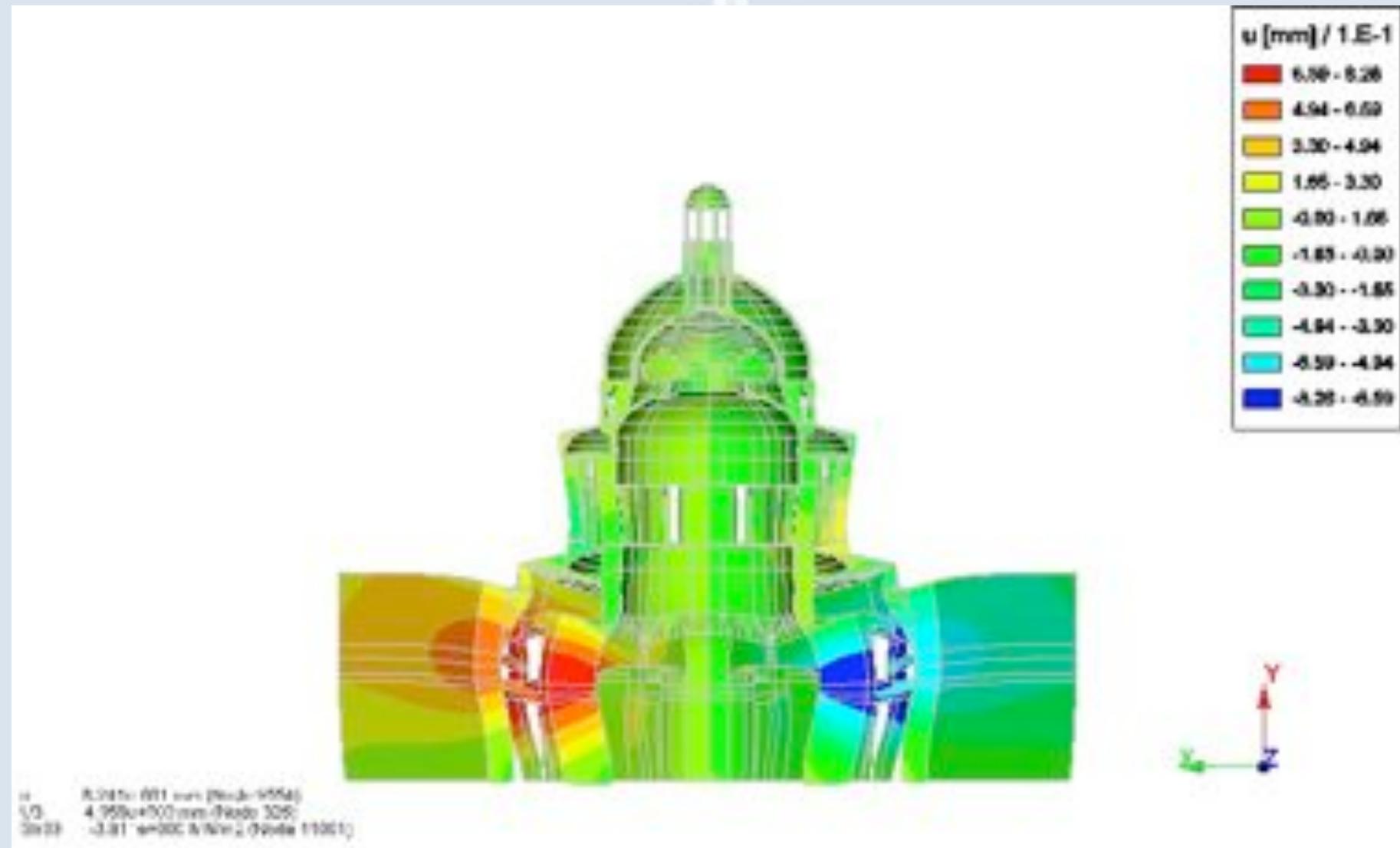
# Modèles adoptés

PANTHÉON

- Modèle linéaire :
  - Avantages : convergence assurée, faible temps de calcul (2h30)
  - Inconvénients : tractions irréalistes (piles), pas de redistribution des contraintes
- Modèle non-linéaire :
  - Avantages : limitations des tractions, redistribution de contraintes, mise en évidence des rotules plastiques
  - Inconvénients : difficultés de convergence, temps de calcul élevé (3h pour une tol. de 0,01)

Un exemple complet d'application : le Panthéon

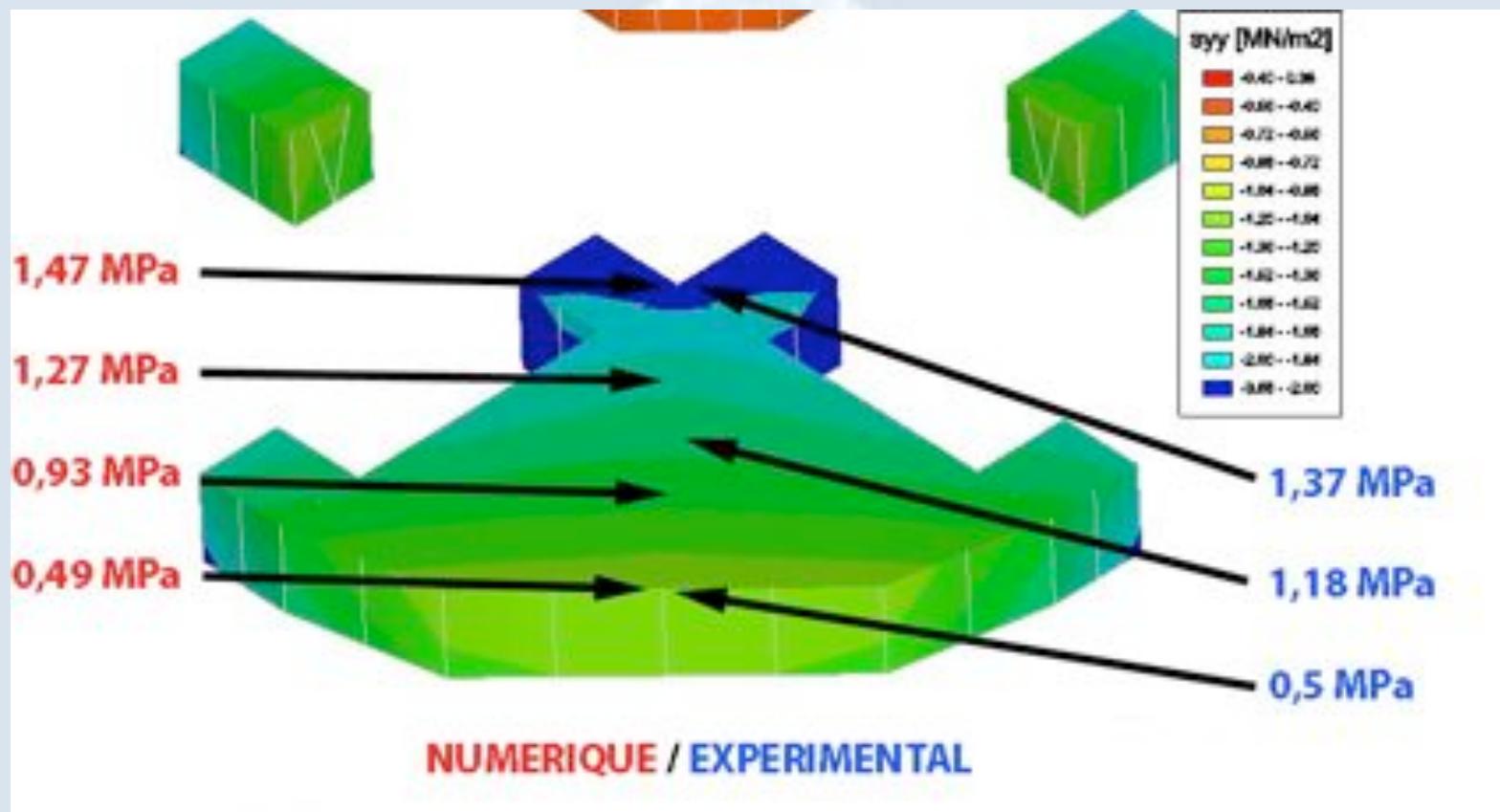
# Résultats sous poids propre



Un exemple complet d'application : le Panthéon

# Résultats sous poids propre

Flexion des piles triangulaires : accord avec les mesures



Un exemple complet d'application : le Panthéon

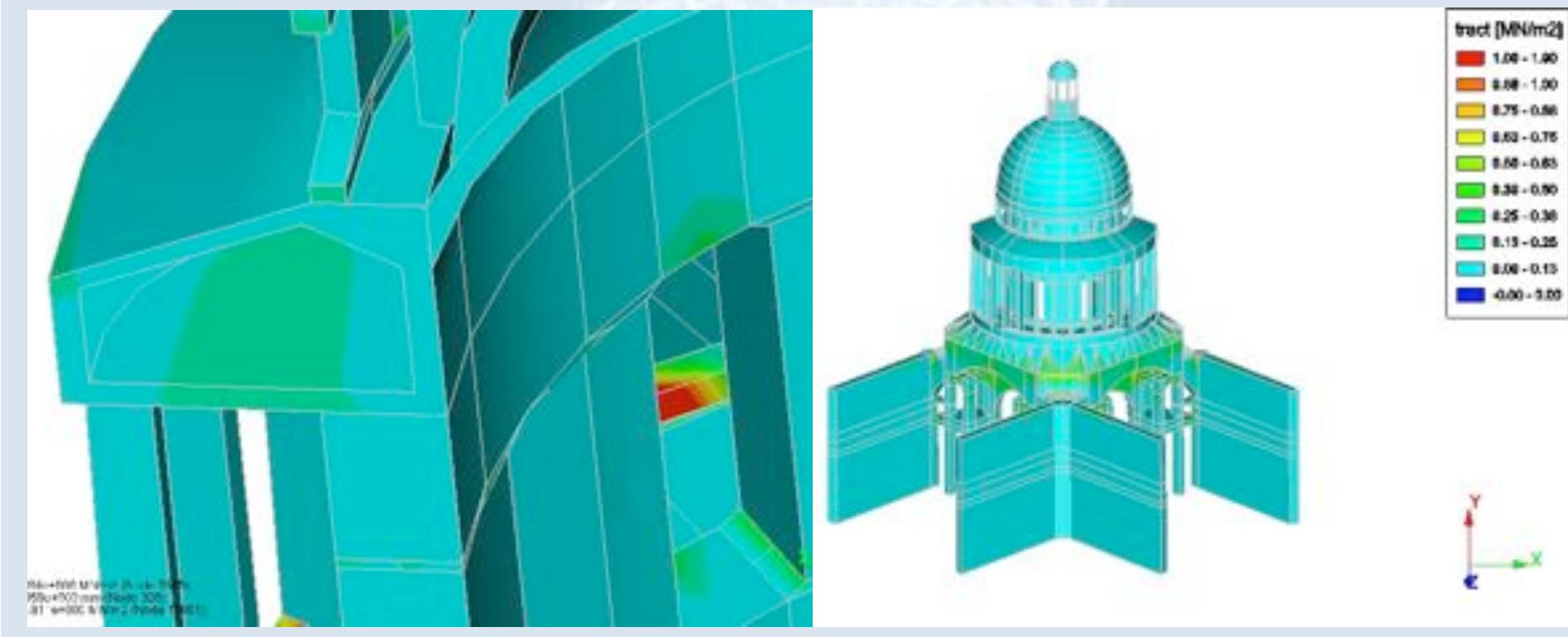
# Résultats sous poids propre

Zones sollicitées sous poids propre :

⇒ Galeries du tambour au droit des piles

⇒ Arcs-boutants

⇒ Murs



# Résultats sous poids propre

Répartition des charges du dôme :

- ⇒ 45 % pour les quatre piles ( $\sim 17\ 000$  tonnes)
- ⇒ 55 % pour les murs *via* les arcs-boutants et les arcs surbaissés en chaînette



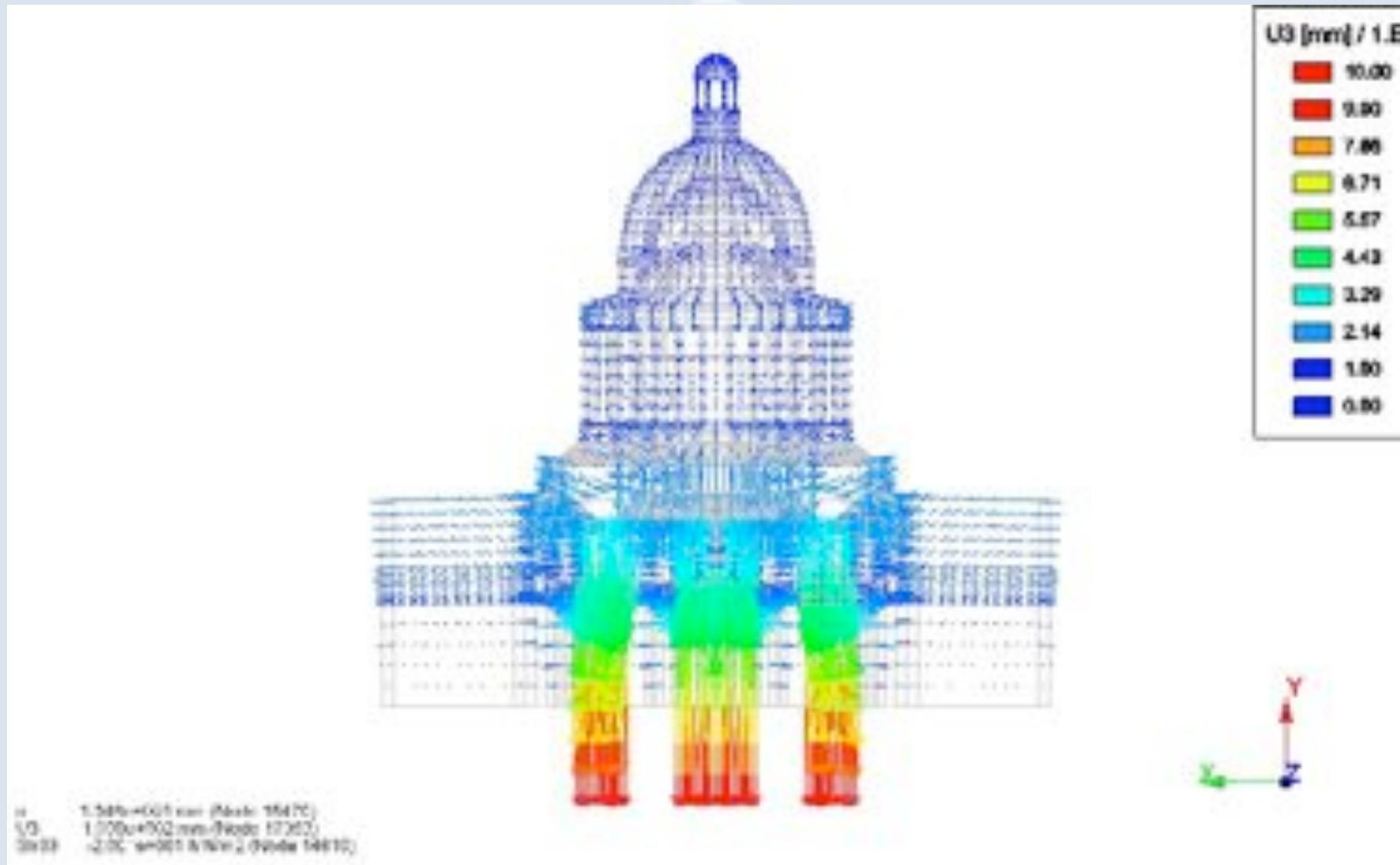
# Résultats sous tassements

- Mode d'application du tassement : déplacement imposé aux nœuds de la base des piles, ce qui revient à tirer sur les piles
  - ⇒ Source de phénomènes parasites
- Phénomènes qualitatifs reproduits par le calcul linéaire
- Détails et « réalisme » des contraintes apportés par les modèles non-linéaires (redistribution de contraintes notamment)

Un exemple complet d'application : le Panthéon

# Résultats sous tassements

PANTHÉON

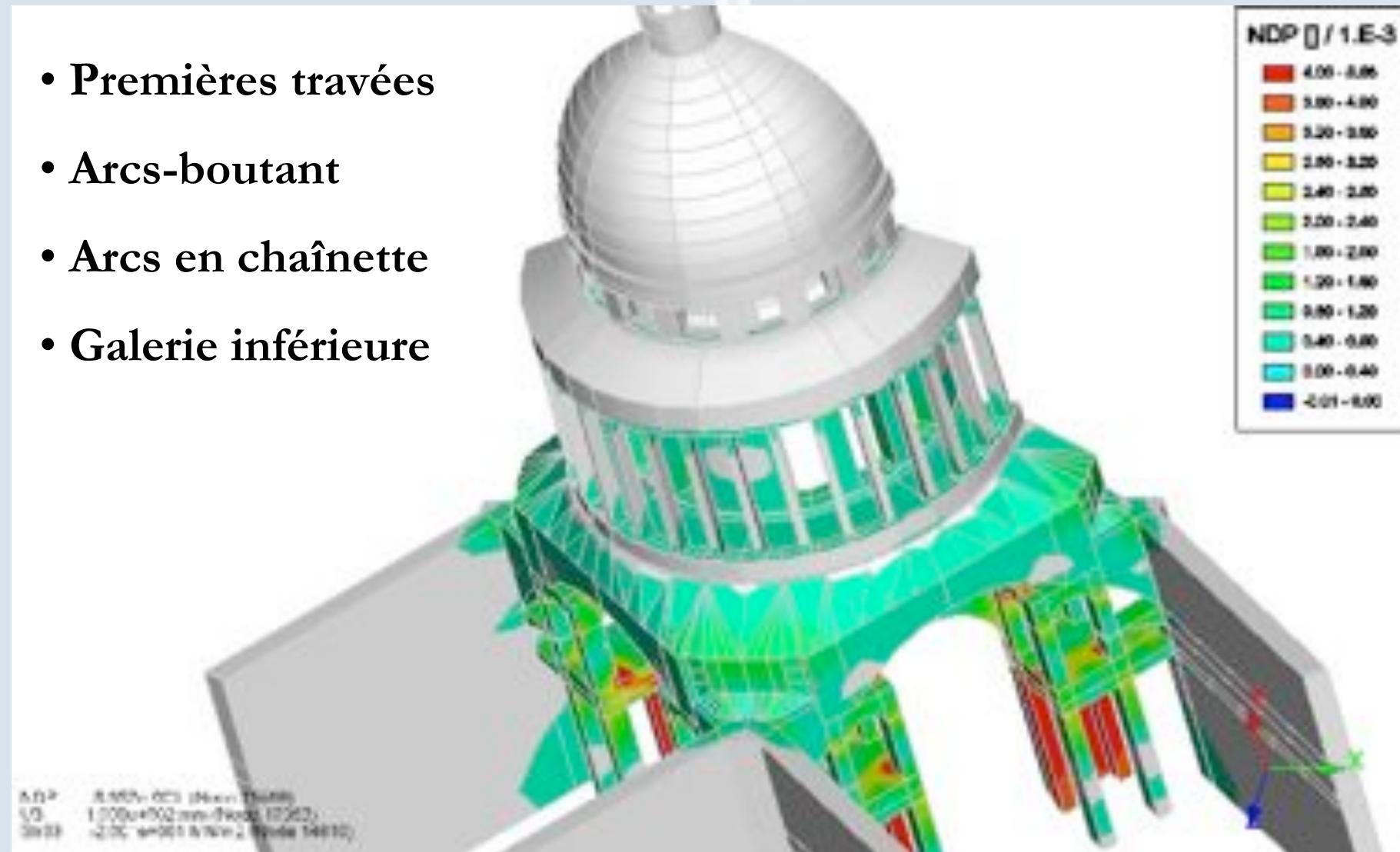


Un exemple complet d'application : le Panthéon

# Résultats sous tassements

PANTHÉON

- Premières travées
- Arcs-boutant
- Arcs en chaînette
- Galerie inférieure

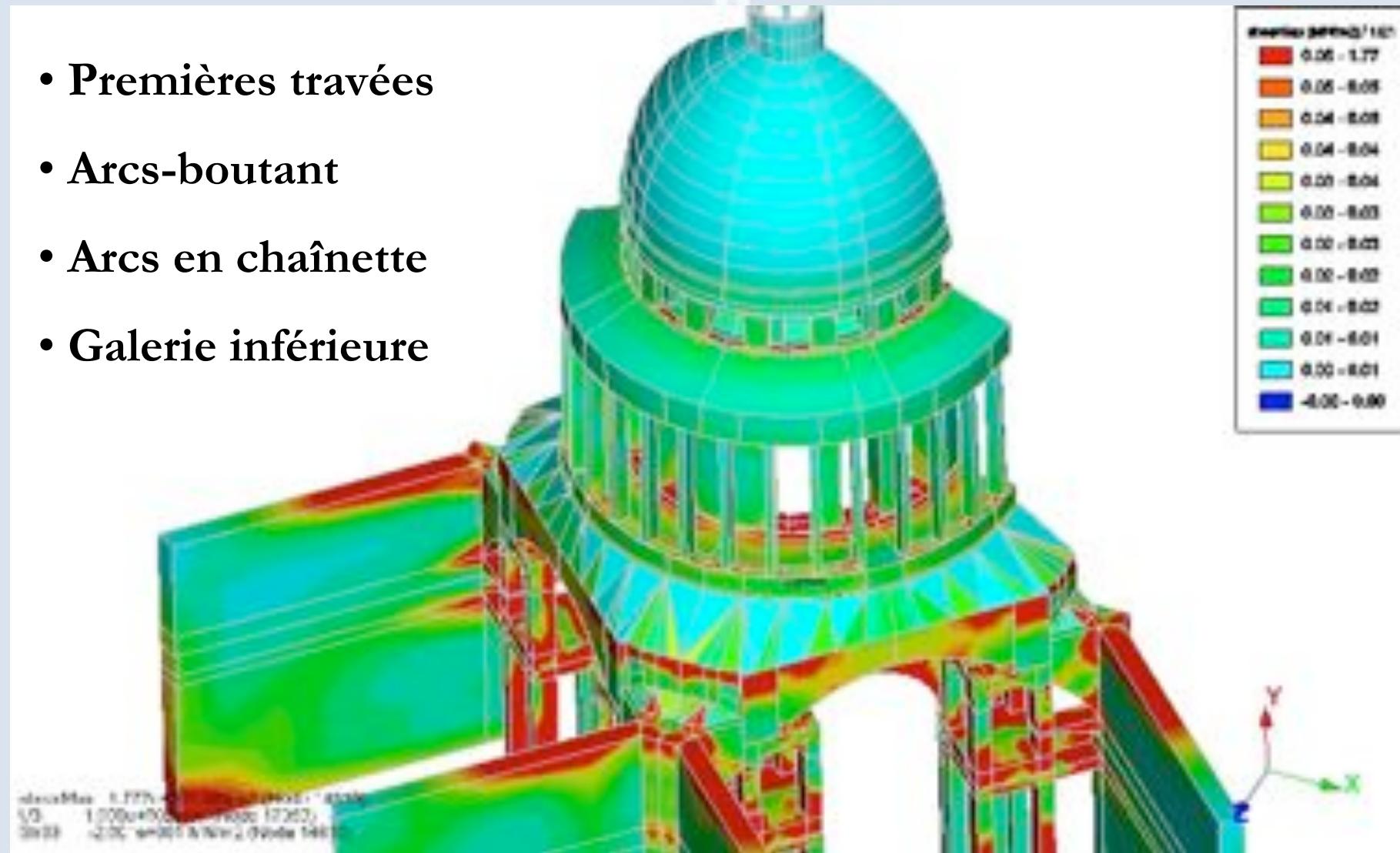


Un exemple complet d'application : le Panthéon

# Résultats sous tassements

PANTHÉON

- Premières travées
- Arcs-boutant
- Arcs en chaînette
- Galerie inférieure

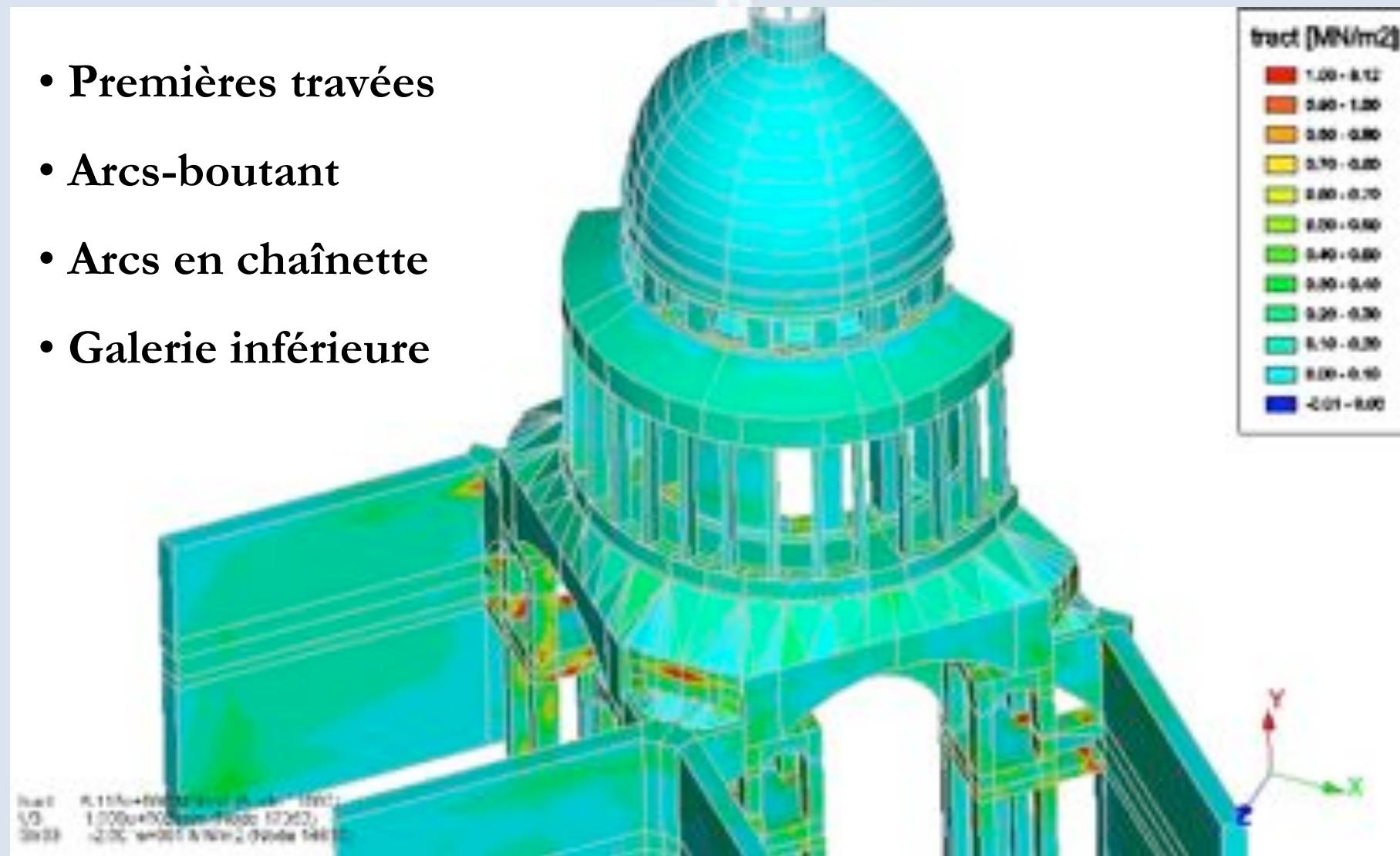


Un exemple complet d'application : le Panthéon

# Résultats sous tassemens

ANTHÉON

- Premières travées
  - Arcs-boutant
  - Arcs en chaînette
  - Galerie inférieure

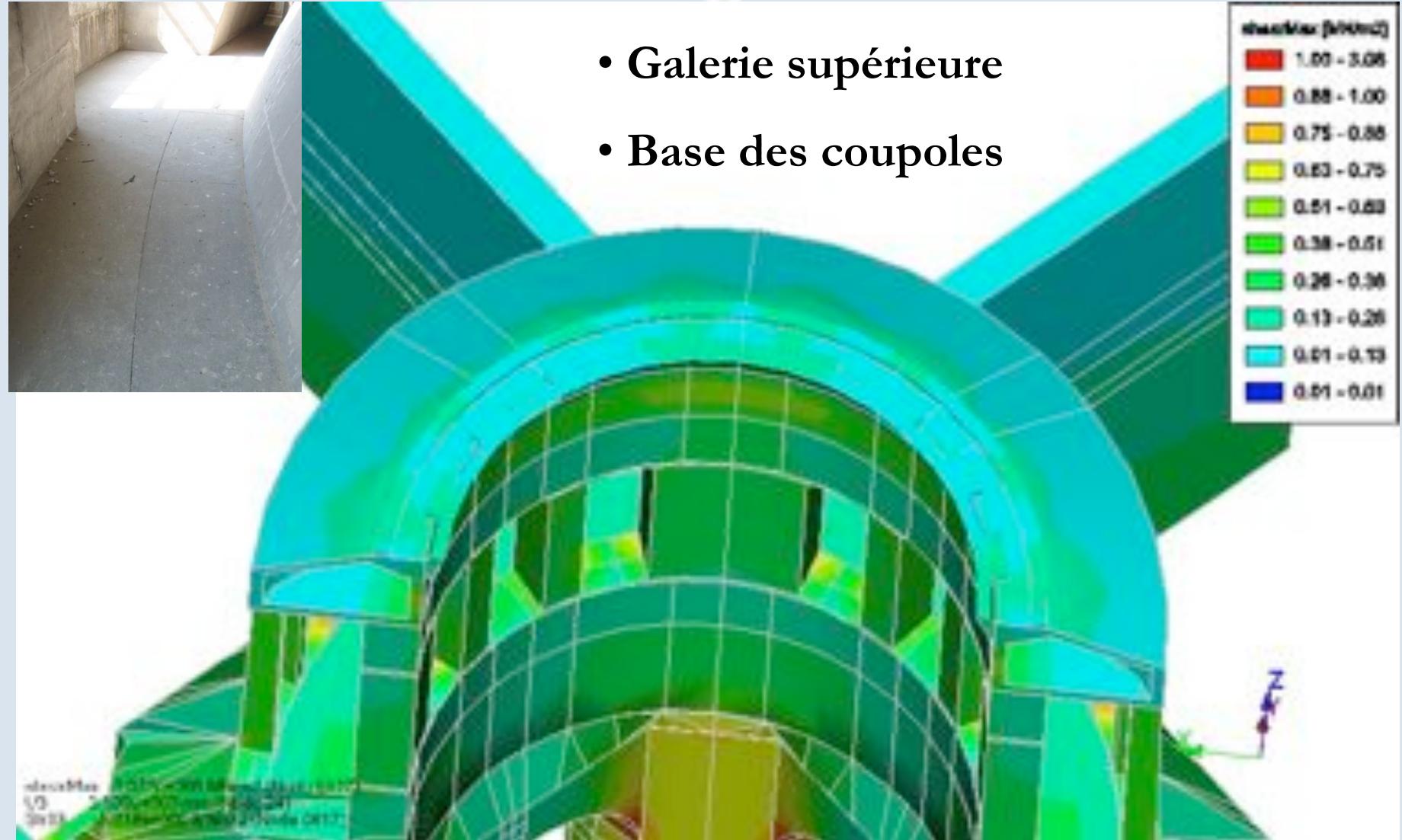


## Un exemple complet d'application : le Panthéon

# Résultats sous tassements

PANTHÉON

- Galerie supérieure
- Base des coupoles

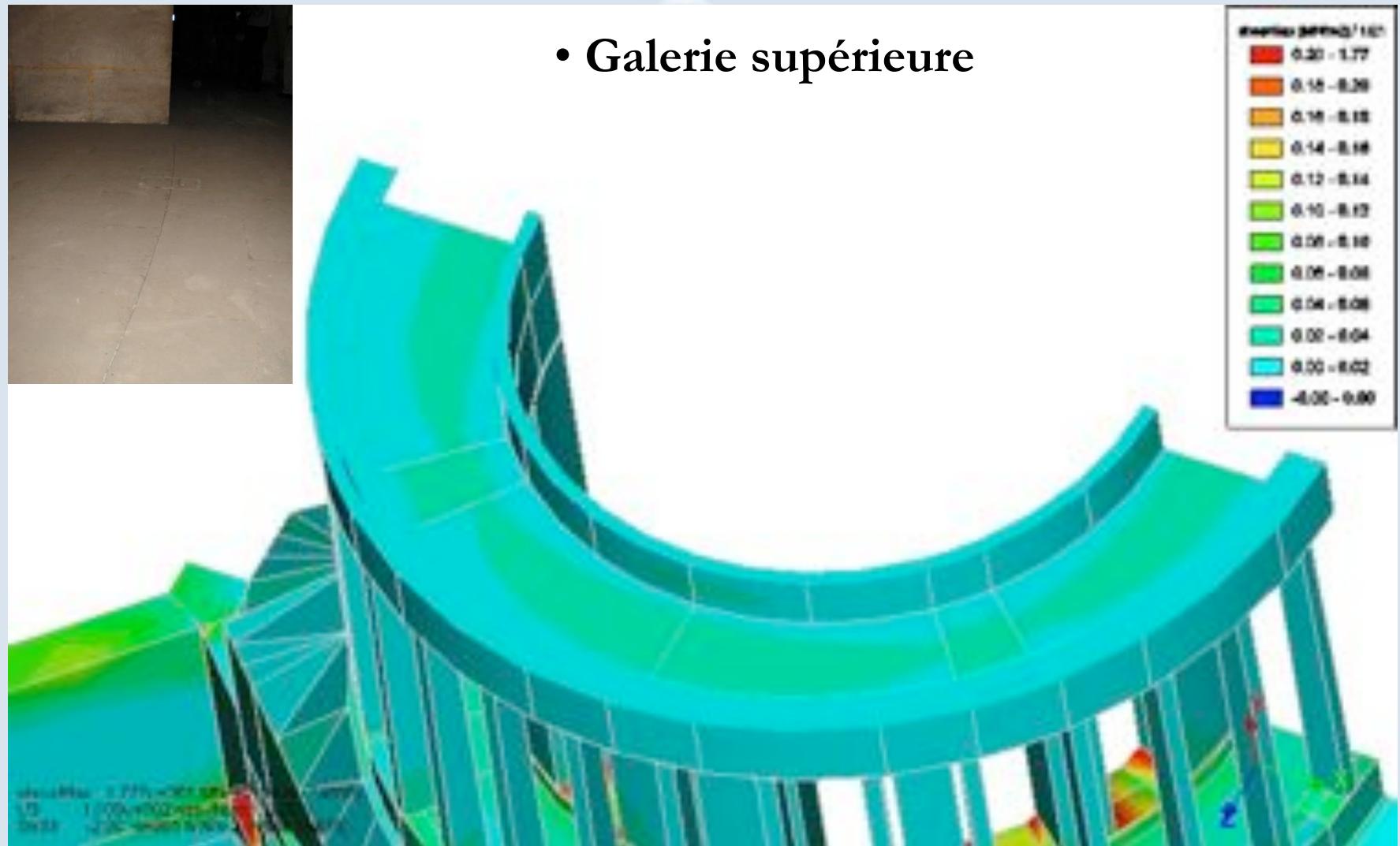


Un exemple complet d'application : le Panthéon

# Résultats sous tassements

PANTHÉON

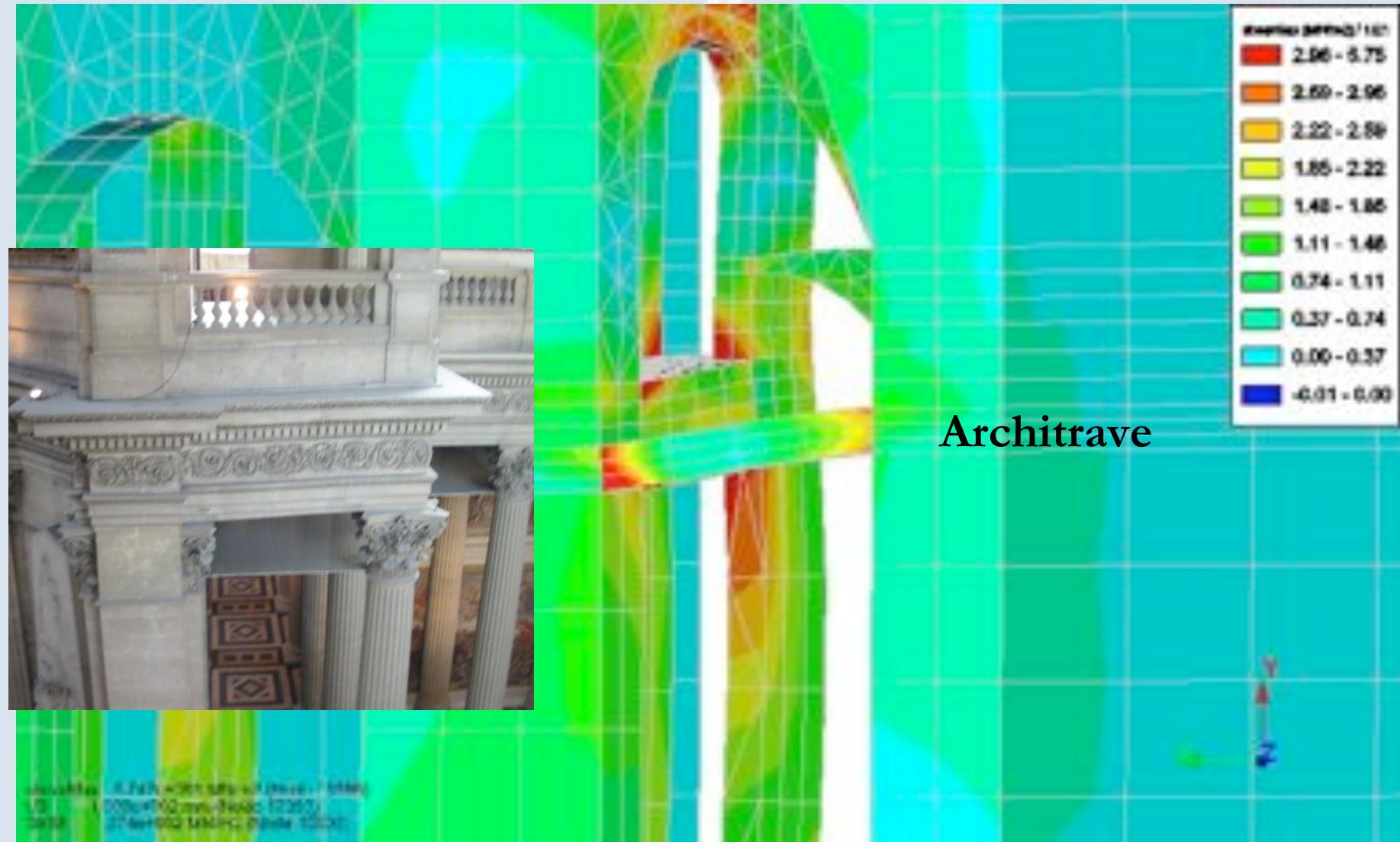
- Galerie supérieure



Un exemple complet d'application : le Panthéon

# Résultats sous tassements

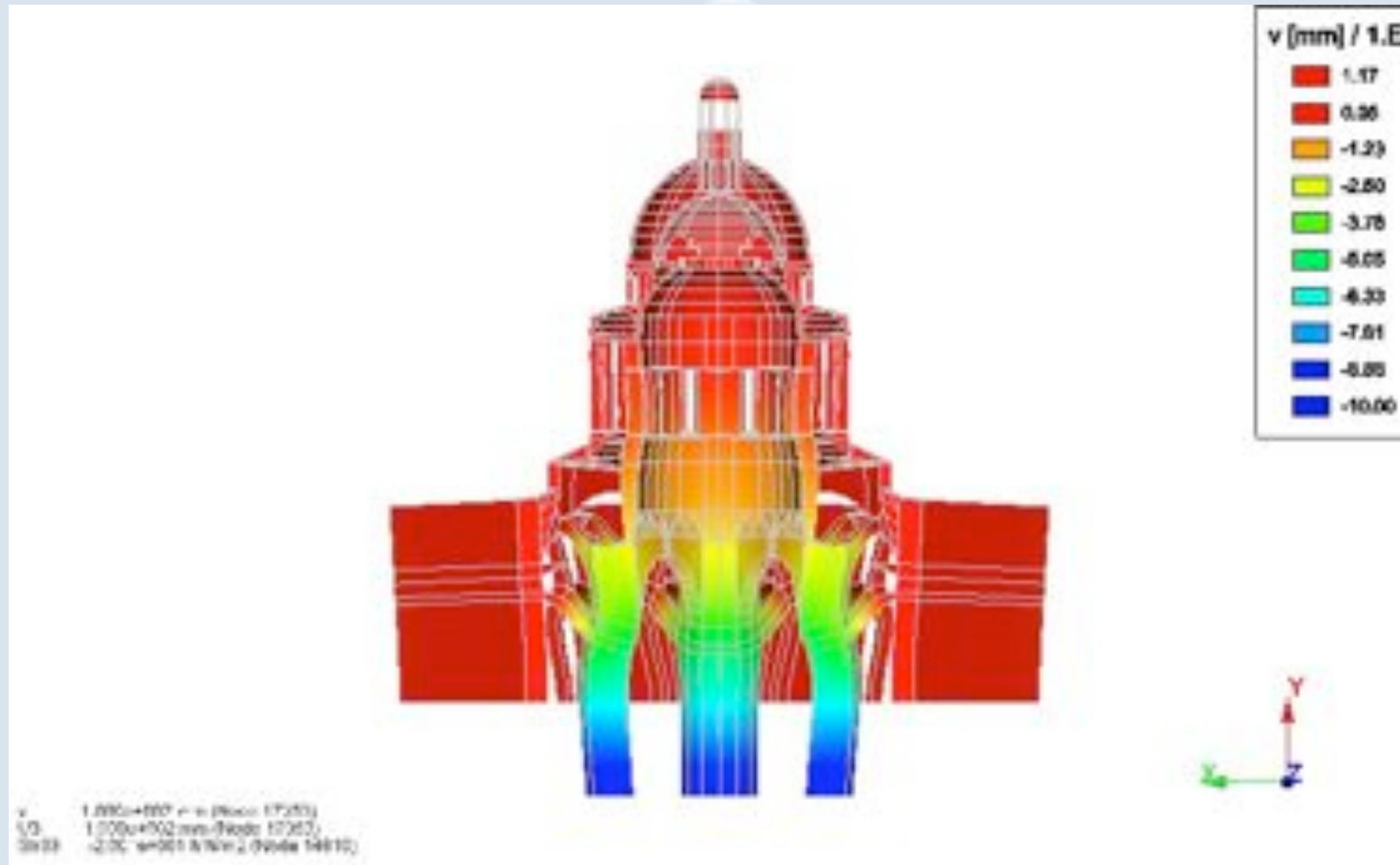
PANTHÉON



Un exemple complet d'application : le Panthéon

# Résultats sous tassements

PANTHÉON

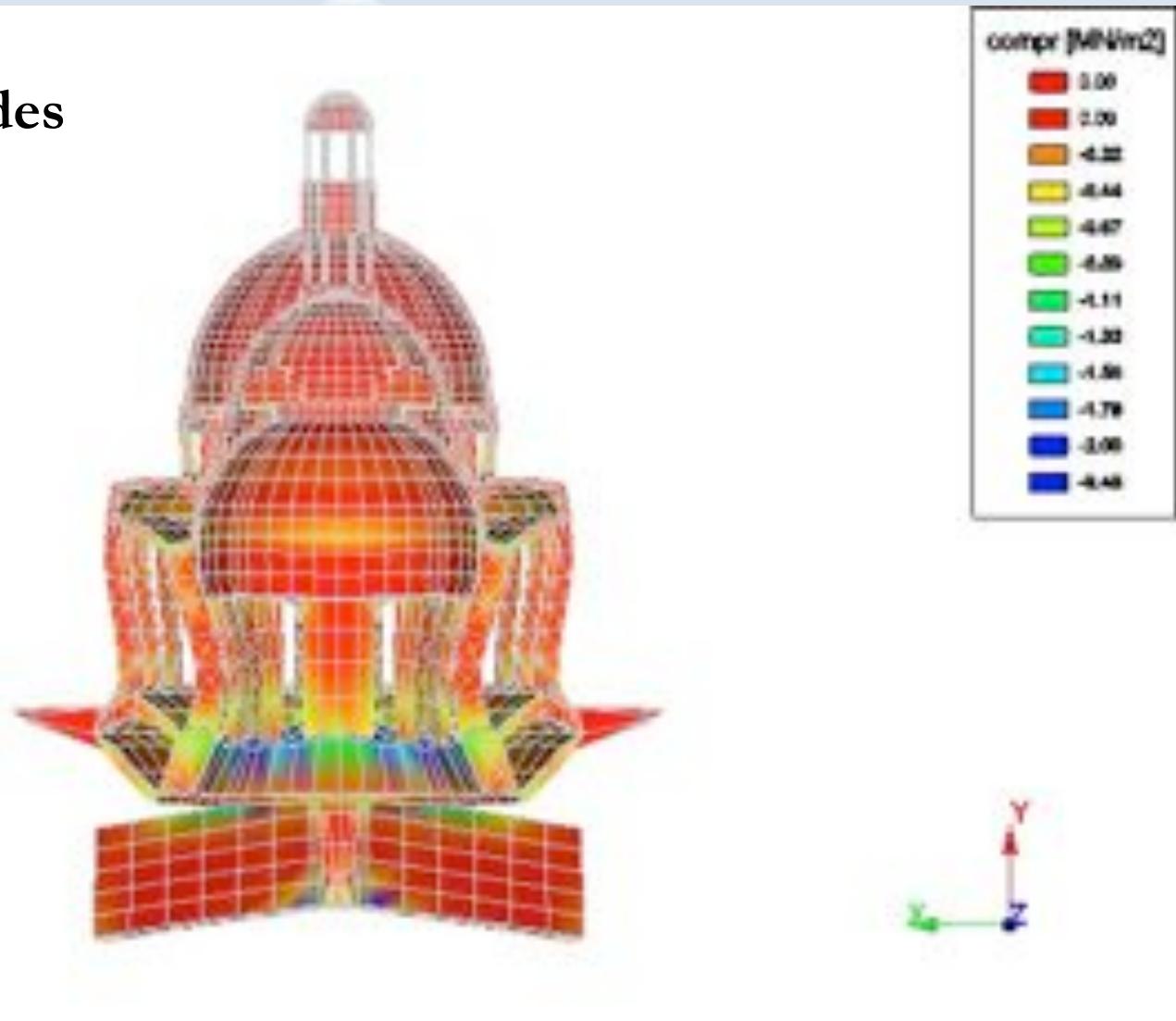


Un exemple complet d'application : le Panthéon

# Résultats sous tassements

PANTHÉON

Excellente tenue des  
coupoles, comme  
constaté *in situ*

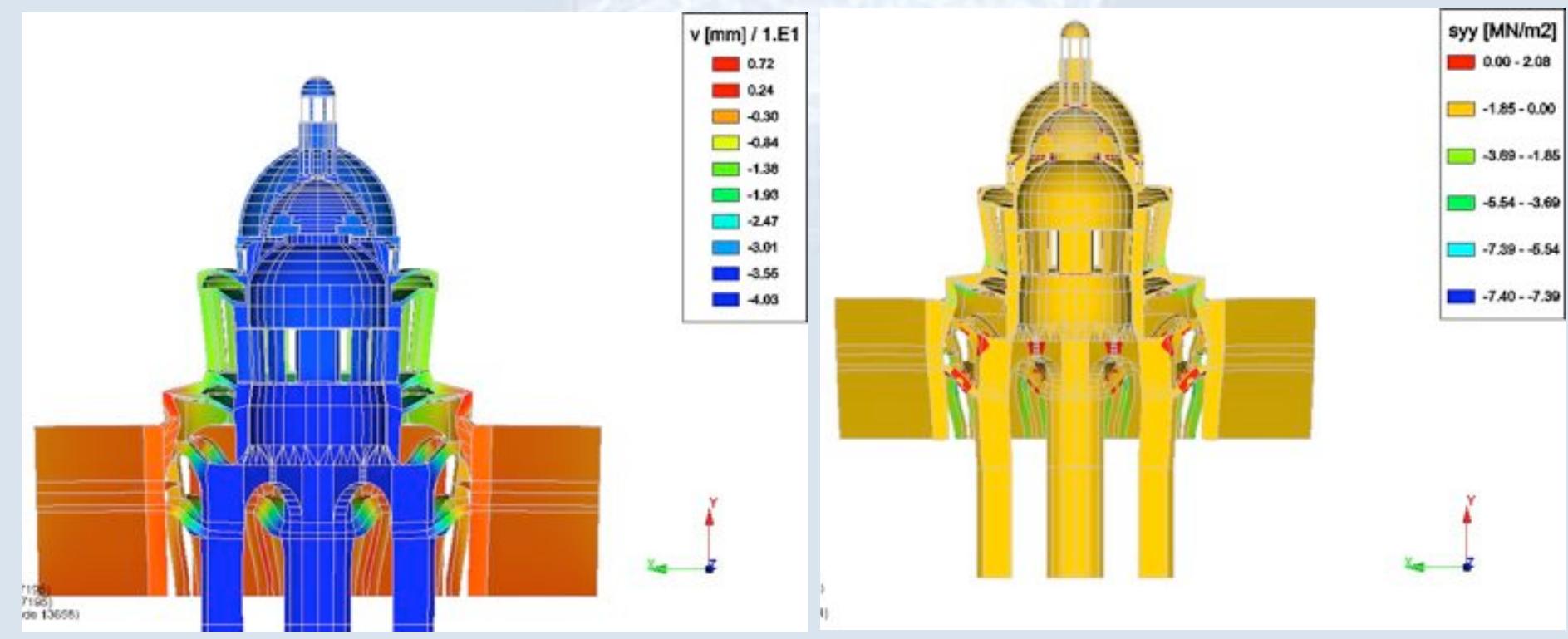


Un exemple complet d'application : le Panthéon

# Résultats sous tassements

ANTHÉON

Pour résoudre les problèmes de traction dans les piles et obtenir des résultats quantitatifs, on introduit des massifs tassants sous les piles ( $\sim 10$  cm sous poids propre)



# Evolution du report de charge

- Les tassements ont une légère tendance à décharger les piles et amènent donc plus de charge sur le système externe
- Il y a une redistribution des charges entre les éléments « externes » de transmission aux murs :
  - Flexion des arcs-boutants
    - moins de reprise de charges à ce niveau
  - Chargement des arcs en chaînette
  - Chargement des premières travées

Un exemple complet d'application : le Panthéon

# Evolution du report de charge

Contraintes de compression (MPa)		
Poids propre seul	Point considéré	Poids propre et tassement de 10 cm
3,46	Extrados de l'arc-boutant	0 (traction)
0,554	Intrados de l'arc-boutant	2,603
0,516	Milieu de la croisée des murs	0,297
2,671	Naissance de l'arc en chaînette	3,865
1,374	Base d'une colonne isolée	2,529
0,157	Quart de l'arc en chaînette	0,671

Contraintes de cisaillement (MPa)		
Poids propre seul	Point considéré	Poids propre et tassement de 10 cm
1,549	Extrados de l'arc-boutant	0,051
0,327	Intrados de l'arc-boutant	1,443
1,072	Naissance de l'arc en chaînette	1,951
0,227	Milieu d'un mur périphérique	0,130

Un exemple complet d'application : le Panthéon

# Conclusion

PANTHÉON

- De tous les types d'analyse, seule l'analyse globale aux éléments finis est adaptée aux cas des structures étendues
- Nécessite des calibrations et la formulation d'hypothèses
- Bien maîtrisé, permet néanmoins d'aller assez loin
- Mise en évidence de l'origine des pathologies par reproduction numérique des phénomènes observés
- Localisation des zones critiques et particulièrement sollicitées.
- Ebauche de compréhension de l'évolution des descentes de charges au cours du tassement des piles.
- Il importe malgré tout de garder suffisamment de recul et d'esprit critique (limites, approximations) par rapport aux résultats de ces modèles

Conclusion

## A consommer avec modération, donc...

*Les résultats numériques sont si précis qu'on a tendance à les croire sans discuter. Il n'est pas impossible que l'inflation des analyses numérique n'agisse comme un substitut à une évaluation du comportement structurel réel d'un édifice.*

*L'utilisation d'ordinateurs doit donc être contrebalancée par le savoir et l'expérience d'ingénieurs capables de juger rapidement de la valeur d'un résultat numérique et de son utilité pratique. Plus que jamais, le défi qui se pose à la profession et aux enseignants, c'est de former des ingénieurs qui seront capables de rester critiques et de rejeter ou modifier les résultats d'une analyse par ordinateur.*

*J. MacGregor*

Conclusion