Chapitre II

Espaces métriques

1 Distances, espaces métriques, espaces normés

1.1 Distances.

Soit E un ensemble. Une *distance* (ou métrique) sur E est une application d de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ ayant les propriétés suivantes :

1. $d(x,y) \geq 0$ pour tout couple x, y d'éléments de E ;
2. $d(x,y) = 0$ si et seulement si $x = y$;
3. $d(x,y) = d(y,x)$ pour tout couple x, y d'éléments de E ;
4. **inégalité triangulaire :** quels que soient x, y, z dans E, on a l'inégalité
$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z).$$

On appelle *espace métrique* le couple (E, d). Par abus de langage, on dit aussi que E, muni de la distance d, est un espace métrique.

Le premier exemple d'espace métrique est $\mathbb{R}$, muni de la distance $d(x,y) = |x-y|$. Si on parle de l'espace métrique $\mathbb{R}$ sans préciser la distance, c'est qu'il s'agit de celle-ci. Les exemples les plus simples, après $\mathbb{R}$, sont donnés par $\mathbb{C}$ muni de la distance $d(z,z') = |z-z'|$, ou $\mathbb{R}^N$ muni de la distance euclidienne,
$$d(x,y) = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + \cdots + |x_N - y_N|^2}\,.$$

Remarque. On déduit de l'inégalité triangulaire les inégalités suivantes :
si $x, y, z \in E$, alors
$$|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y)\,;$$
si $x_1, x_2, \cdots, x_n$ sont des éléments de E, alors
$$d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n)\,.$$

Attention! Un espace métrique n'a aucune raison d'être un espace vectoriel.

1.2 Suites et sous-suites. Première définition d'une fonction continue

La notion de distance permet d'introduire la notion de *suite convergente* dans un espace métrique (E, d). Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite dans E, et a un point de E. On dit que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ tend vers a si la suite de nombre réels $d(x_n, a)$ tend vers 0, ou encore si
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon.$$

Il y a unicité de la limite.

Pour bien comprendre cette définition, il faut la voir de façon géométrique, en termes d'appartenance à une boule de rayon arbitrairement petit à partir d'un certain rang. Étant donnés $a \in E$ et $r > 0$, on appelle *boule de centre a et de rayon r* l'ensemble
$$B(a,r) = \{x \in E\ ;\ d(a,x) < r\}.$$

On dit d'une partie de E qu'elle est *bornée* si elle est incluse dans une boule. Si $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite convergente, elle est bornée : il existe une boule $B(a,r)$ contenant tous les x_n. En effet, soit x la limite de la suite et a arbitraire. Il existe N tel que, pour $n \geq N$, on ait l'inégalité $d(x_n, x) < 1$. Il suffit de choisir
$$r = \max\{1 + d(a,x), d(a,x_0), \cdots, d(a, x_{N-1})\}.$$

Une autre notion fondamentale est celle de *suite extraite* (ou sous-suite) d'une suite donnée : soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite dans E. On dit que $(y_n)_{n\geq 0}$ est une suite extraite de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ s'il existe une injection croissante $\varphi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ telle que, pour tout $n \geq 0$, on ait $y_n = x_{\varphi(n)}$. Pour simplifier l'écriture, on utilise habituellement un indice différent, on note $k \to n_k$ l'injection φ et x_{n_k} la suite extraite. On appelle *valeur d'adhérence* de la suite (x_n) toute limite d'une sous-suite.

Rappelons la *propriété de Bolzano-Weierstrass dans* $\mathbb{R}$: toute suite bornée de nombre réels admet au moins une valeur d'adhérence. Attention, elle n'est pas vraie en général dans un espace métrique !

Soient (E_1, d_1) et (E_2, d_2) deux espaces métriques, f une bijection de E_1 sur E_2. On dit que f est une *isométrie* si f préserve la distance, c'est-à-dire si $d_2(f(x), f(y)) = d_1(x, y)$. Lorsqu'il existe une isométrie entre (E_1, d_1) et (E_2, d_2), on dit encore que ces deux espaces sont *isométriques.* Remarquons qu'alors la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ dans E_1 converge vers a si et seulement si $f(x_n)$ converge vers $f(a)$.

Soient (E, d) et (E', d') deux espaces métriques, $f : E \mapsto E'$. On dit que f est *continue au point* $a \in E$ si f satisfait la condition

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0\ :\ d(x, a) < \eta \Rightarrow d'(f(x), f(a)) < \varepsilon\,.$$

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. *f est continue en a ;*
2. *quelle que soit la suite x_n tendant vers a, la suite $f(x_n)$ tend vers $f(a)$.*

Une fonction f est dite *continue* sur E si elle est continue en tout point. En particulier, une isométrie est une fonction continue.

Les exemples fondamentaux sur lesquels nous allons travailler le plus sont des espaces vectoriels normés, ou des parties d'un espace vectoriel normé.

1.3 Espaces vectoriels normés

Soit E un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On dit que l'application $x \to \|x\|$ est une *norme* sur E si elle possède les propriétés suivantes :

1. $\|x\| \geq 0$ pour tout x dans E ;
2. $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$;
3. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ pour tout scalaire λ et tout x dans E ;
4. **inégalité triangulaire pour les normes :** quels que soient x, y dans E, on a l'inégalité
$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

On appelle espace vectoriel normé le couple $(E, \|\ \|)$.

Le théorème suivant, de démonstration tout à fait élémentaire, montre qu'à chaque espace vectoriel normé on peut faire correspondre un espace métrique.

Théorème. *Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé. Alors $d(x, y) = \|x - y\|$ définit une distance sur E.*

La suite $(x_n)_{n\geq 0}$ dans E converge vers a si et seulement si $\|x_n - a\|$ tend vers 0.

Rappelons des exemples de normes. Sur $\mathbb{R}^N$, on peut considérer les trois normes suivantes

$$||x||_1 = |x_1| + \cdots + |x_N|\,, \qquad ||x||_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_N|^2}\,,$$

$$||x||_\infty = \max\{|x_1|, \cdots, |x_N|\}\,.$$

La norme $||\ ||_2$ est la norme euclidienne. Ces normes sont *équivalentes* :

$$||x||_\infty \leq ||x||_2 \leq ||x||_1 \leq \sqrt{N}||x||_2 \leq N||x||_\infty.$$

On associe aux trois normes trois distances, d_1, d_2 et d_∞. L'équivalence des normes entraîne qu'une suite converge pour l'une des trois distances si et seulement si elle converge pour une des deux autres.

Un autre exemple, qu'on étudiera longuement, est le suivant : on appelle $\mathcal{B}(A, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions bornées définies sur l'ensemble A à valeurs dans $\mathbb{R}$. On définit facilement la somme de deux fonctions, ou le produit par un scalaire, qui permettent de munir $\mathcal{B}(A, \mathbb{R})$ d'une structure d'espace vectoriel. On définit alors

$$||f||_{\mathcal{B}(A,\mathbb{R})} = \sup_{t \in A} |f(t)|.$$

On vérifie que c'est une norme sur $\mathcal{B}(A, \mathbb{R})$.

1.4 sous-espaces métriques, espaces produits, transports de distances

Soit (E, d) un espace métrique, F une partie de E. Alors la restriction à $F \times F$ de d est une distance sur F, appelée *distance induite*. On dit que F, muni de la distance induite par d, est un sous-espace métrique de (E, d).

Remarquons que la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ converge dans F si et seulement si les deux propriétés sont satisfaites :

– $(x_n)_{n \geq 0}$ converge dans E ;
– sa limite appartient à F.

Soient (E_1, d_1) et (E_2, d_2) deux espaces métriques, $E = E_1 \times E_2$. Alors

$$d(x, y) = \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}$$

définit une distance sur E, appelée *distance produit*. L'espace métrique obtenu est appelé *espace métrique produit*.

Remarquons que la suite de couples $x_n = (x_{1,n}, x_{2,n})$ converge vers $a = (a_1, a_2)$ si et seulement si les deux propriétés sont satisfaites :

– la suite $x_{1,n}$ converge vers a_1 dans E_1 ;
– la suite $x_{2,n}$ converge vers a_2 dans E_2.

De plus, la fonction *projection* de $E_1 \times E_2$ dans E_1 définie par $(x_1, x_2) \to x_1$ est continue. De même, la fonction *extension* de E_1 dans $E_1 \times E_2$, définie par $x \to (x, a)$, où a est un élément fixé de E_2, est continue. On a la proposition suivante :

Proposition. *Soient (E, d), (E_1, d_1) et (E_2, d_2) trois espaces métriques, $f = (f_1, f_2)$ une application de E dan $E_1 \times E_2$. Alors f est continue en a si et seulement si f_1 et f_2 sont continues en a.*

Soit (E, d) un espace métrique et soit f une bijection de l'ensemble F sur E. L'application définie sur $F \times F$ par $(x, y) \to d(f(x), f(y))$ est une distance sur F. On dit qu'on a *transporté* la distance d de E à F.

Une partie qu'on vient de faire a un sens pour les espaces vectoriels normés. Mais **attention! On ne peut dire que F est un sous-espace vectoriel normé de E que si F est un sous-espace vectoriel de E.**

Si $(E_1, \| \|_1)$ et $(E_2, \| \|_2)$ sont deux espaces vectoriels normés, alors $E = E_1 \times E_2$ peut être muni d'une structure d'espace vectoriel. De plus

$$\|x\| = \max\{\|x_1\|_1, \|x_2\|_2\}$$

définit une norme sur E, appelée *norme produit*. L'espace vectoriel normé obtenu est appelé *espace produit*.

2 Ouverts, fermés, voisinages, intérieur, adhérence

Un *ensemble ouvert* de E, ou plus simplement un ouvert de E, est une partie A de E qui possède la propriété suivante :

A est ouvert si et seulement si, quel que soit $a \in A$, il existe $r > 0$ tel que la boule $B(a, r)$ soit incluse dans A. Une boule $B(a, r)$ est un ouvert.

La famille des ouverts possède les propriétés fondamentales suivantes.

1. **L'ensemble vide et E tout entier sont des ouverts.**
2. **Toute réunion d'ouverts est un ouvert.**
3. **Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.**

On appelle *ensemble fermé* de E toute partie dont le complémentaire est un ouvert. La famille des fermés possède les propriétés suivantes.

1. **L'ensemble vide et E tout entier sont des fermés.**
2. **Toute intersection de fermés est un fermé.**
3. **Toute réunion finie de fermés est un fermé.**

En particulier, l'ensemble

$$B'(a,r) = \{x \in E \; ; \; d(a,x) \leq r\}$$

est un fermé quel que soit $a \in E$ et $r \geq 0$. L'ensemble $B'(a,r)$ est appelé *boule fermée* de centre a et de rayon r tandis que, lorsqu'il y a ambiguïté, la boule $B(a,r)$ est dite boule ouverte. Le lemme suivant permet de caractériser les fermés en termes de suites.
Lemme. *La partie A est fermée si et seulement si, quelle que soit la suite x_n de points de a qui est convergente, la limite de la suite appartient à A.*

Montrons comme application que $\mathbb{Z}$ est fermé dans $\mathbb{R}$. Soit x_n une suite d'entiers qui converge. A partir d'un certain rang, $|x_n - x_{n-1}| < \frac{1}{2}$. Comme x_n et x_{n-1} sont entiers, il en résulte qu'ils sont égaux. La suite est stationnaire à partir d'un certain rang, et sa limite est un entier.

On appelle *voisinage* du point a toute partie A de E telle qu'il existe $r > 0$ pour lequel $B(a,r) \subset A$. En particulier, un ouvert est voisinage de chacun de ses points. Réciproquement, une partie qui est voisinage de chacun de ses points est un ouvert. La famille des voisinages de a possède les propriétés suivantes.

1. **Tout voisinage de a contient a.**
2. **Toute partie contenant un voisinage de a est un voisinage de a.**
3. **Toute intersection finie de voisinages de a est un voisinage de a.**

Soit A un sous-ensemble de E. On dit que B est un *voisinage de A* s'il est un voisinage de chacun des points de A, ou, de façon équivalente, s'il contient un ouvert contenant A. Lorsque A est le singleton $\{a\}$, B est un voisinage de A si et seulement si B est un voisinage de a. On dit

que a est un *point intérieur* à A si A est un voisinage de a ou, de façon équivalente, s'il existe une boule ouverte centrée en a contenue dans A. L'ensemble des points intérieurs à A est appelé *intérieur de* A, et noté $\overset{\circ}{A}$.
Lemme. *L'intérieur de A est le plus grand ouvert contenu dans A.*

En particulier, un ouvert coincide avec son intérieur. On a de plus les propriétés suivantes :

$$\textit{si } A \subset B, \textit{ alors } \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}. \textit{ L'intérieur de } A \cap B \textit{ est égal à } \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}.$$

On dit que a est un *point adhérent* à A si toute boule centrée en a contient un point de A. En particulier tout point de A est adhérent à A. Plus généralement :
Lemme. *Le point a est adhérent à A si, et seulement si, il existe une suite x_n de points de a qui converge vers a.*

Remarque. Lorsque A est l'ensemble $\{x_n \; n \geq 0\}$, un point adhérent à A est un point de A ou une valeur d'adhérence de la suite x_n.

L'ensemble des points adhérents à A est appelé *adhérence de* A, et noté $\overline{A}$. L'adhérence de A contient A, et est un fermé. De plus,
Lemme. *L'adhérence de A est le plus petit fermé contenant A. C'est aussi le complémentaire de l'intérieur du complémentaire de A.* En particulier, un fermé coincide avec son adhérence. On a de plus les propriétés suivantes :

si $A \subset B$, alors $\overline{A} \subset \overline{B}$. L'adhérence de $A \cup B$ est égale à $\overline{A} \cup \overline{B}$.

Etant donné un sous-ensemble A non vide de E, on appelle distance de x à A, et on note $d(x, A)$, la quantité

$$d(x, A) = \inf\{d(x, y) \ ; \ y \in A\}.$$

On a alors la relation :

$$\overline{A} = \{x \in E \ ; \ d(x, A) = 0\}.$$

3 Fonctions continues et uniformément continues

Soient (E, d) et (E', d') deux espaces métriques, $f : E \mapsto E'$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. **f est continue en a ;**
2. **pour tout voisinage V' de $f(a)$, il existe un voisinage V de a tel que $f(V) \subset V'$;**
3. **l'image réciproque par f d'un voisinage de $f(a)$ est un voisinage de a ;.**

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. **f est continue ;**
2. **l'image réciproque par f d'un ouvert de E' est un ouvert de E ;**
3. **L'image réciproque par f d'un fermé de E' est un fermé de E ;**
4. **pour tout ensemble A dans E, on a l'inclusion $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.**

La notion de continuité est *stable par composition des applications* : si f est continue en a et g est continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en $f(a)$. Nous allons donner les définitions de propriétés plus restrictives, mais plus simples à vérifier.

Définitions. On dit que $f : E \mapsto E'$ est *uniformément continue* si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ \forall (x, y) \in E \times E \ : \ d(x, y) < \eta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon \ ;$$

On dit que f est *K-Lipschitzienne* si, pour tout $(x, y) \in E \times E$, on a l'inégalité

$$d'(f(x), f(y)) \leq K d(x, y).$$

Les implications suivantes sont très simples à démontrer :

uniforme continuité $\Rightarrow$ continuité f K-Lipschitzienne $\Rightarrow$ f uniformément continue.

Exemples :

- Soit (E, d) un espace métrique, A une partie de E munie de la distance induite. Alors l'injection de E dans A est continue. En particulier, l'image réciproque d'un ouvert U de E, c'est-à-dire $U \cap A$, est un ouvert de A. Réciproquement, tout ouvert de A s'écrit sous la forme $U \cap A$.
- Soit (E_1, d_1) et (E_2, d_2) deux espaces métriques, $E = E_1 \times E_2$ l'espace métrique produit. Alors les projections de E sur E_1 et E_2 sont continues.
- **Fonction distance à un ensemble.** Du fait que, quels que soient x, y, z, avec $z \in A$, on a l'inégalité triangulaire

  $$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z),$$

  il résulte immédiatement que

  $$d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, z),$$

  puis, comme cette inégalité a lieu pour tout $z \in A$, que

  $$d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A).$$

  En échangeant le rôle de x et y éventuellement, on en déduit que

  $$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y).$$

  La fonction $d(\cdot, A)$ est 1-Lipschitzienne, donc uniformément continue, donc continue.

Deux exemples fondamentaux d'espace vectoriels normés : $\mathcal{B}(A, \mathbb{R})$ et $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$.

Nous avons déjà vu que $\mathcal{B}(A, \mathbb{R})$ était un espace vectoriel normé lorsqu'on le munissait de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup |f|.$$

Cette norme est appelée norme de la convergence uniforme du fait de la propriété suivante :

Lemme. *La suite (f_n) converge vers f dans $\mathcal{B}(A, \mathbb{R})$ si et seulement si f_n converge uniformément vers f, c'est-à-dire*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ ; \ n \geq N \Rightarrow \forall t \in A \ |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon.$$

Remarque. On peut aussi bien définir $\mathcal{B}(A, F)$, où F est un espace vectoriel normé quelconque. On peut définir la convergence uniforme pour n'importe quelle suite de fonctions définies sur un ensemble A quelconque et à valeurs dans un espace métrique F. Nous allons énoncer de façon plus générale le théorème suivant.

Théorème. *Soient (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques. Soit (f_n) une suite de fonctions continues de E dans F, convergeant uniformément vers f. Alors f est continue.*

On dit, de façon abrégée, que toute limite uniforme de fonctions continues est continue. Démontrons le théorème. Soit $a \in E$. On veut rendre $\delta(f(x), f(a))$ inférieur à ε. On écrit

$$\delta(f(x), f(a)) \leq \delta(f(x) - f_n(x)) + \delta(f_n(x) - f_n(a)) + \delta(f_n(x), f(a)).$$

On commence par majorer le premier et le troisième terme par $\epsilon/3$ en choisissant n assez grand, grâce à l'uniforme convergence. Puis, n étant ainsi fixé, on sait qu'il existe η tel que, pour $d(x, a) < \eta$, on ait $\delta(f(x), f(a)) < \varepsilon/3$. On en déduit en particulier le théorème suivant.

Théorème. *L'espace $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ est un sous espace fermé de l'espace $\mathcal{B}([0,1], \mathbb{R})$.*

Quelques références

Pour en savoir plus :

1. Topologie et analyse fonctionnelle, par Georges Skandalis, Dunod

2. Notions de topologie. Introduction aux espaces fonctionnels –Deuxième cycle, par Claude Tisseron, Hermann

3. Topologie : Cours et exercices corrigés, par Hervé Queffélec, Masson

4. Topologie, par Gilles Christol, Jean Cot et Charles-Michel Marle, Ellipses

Deux cours qu'on peut récupérer sur le web (le premier est analogue à celui-ci, le second, en anglais, contient beaucoup de détails et d'exercices) :

http://www.ccr.jussieu.fr/eqanalyse/Users/jsr/preprints/TopoCD.pdf
http://www.math.unl.edu/ webnotes/home/home.htm