UNIVERSITÉ
DU SUD
TOULON-VAR

Faculté des Sciences et Techniques

Département de Mathématiques

Licence MASS 3ème année. (2005-06)

M55: Probabilités

Equipe pédagogique:

Cours.	N. Berglund	berglund@univ-tln.fr
Travaux Dirigés.	J.-M. Barbaroux	barbarou@univ-tln.fr

1. Rappels: combinatoire, probabilités conditionnelles

Exercice 1.1. Combien le mot MISSISSIPPI a-t-il d'anagrammes?

Exercice 1.2. On dénote par
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$
le nombre de manières de choisir k objets parmi n.

- Vérifier la relation
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1},$$
par calcul direct, puis par un argument de combinatoire. Expliquer la relation avec le triangle de Pascal.
- Démontrer la formule du binôme
$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Exercice 1.3.
- Combien de fois faut-il jeter un dé (non pipé) afin d'obtenir au moins un 6 avec une probabilité supérieure ou égale à 99%?
- Est-il plus probable d'obtenir
  - au moins un nombre pair en lançant 2 dés,
  - ou au moins un multiple de 3 en lançant 3 dés?

Exercice 1.4. Une urne contient 5 boules blanches et 4 boules noires. On tire successivement 2 boules au hasard. Calculer les probabilités d'obtenir
- 2 boules noires,
- 2 boules blanches,
- 1 boule de chaque couleur,
- 1 boule noire au second tirage, sachant qu'on a obtenu une blanche au premier tirage.

On considérera le cas avec remise, puis le cas sans remise.

Exercice 1.5. Le quart d'une population a été vacciné contre une maladie contagieuse. Au cours d'une épidémie on constate qu'il y a, parmi les malades, un vacciné pour 9 non vaccinés.
- Les événements "avoir été vacciné" et "être tombé malade" sont-ils indépendants?

- Au cours de l'épidémie, il y a eu un malade sur 12 parmi les vaccinés. Quelle était la probablilité de tomber malade pour quelqu'un de non vacciné?

Exercice 1.6. Madame Soleil habite Nantes, où il pleut un jour sur deux. Les prévisions météo ont un taux de fiabilité de 2/3 (s'il pleut, il y a deux chances sur trois pour que la météo ait prédit de la pluie, de même s'il fait beau).
Madame Soleil emporte toujours son parapluie si la météo annonce de la pluie. Si la météo annonce du beau temps, elle emporte son parapluie une fois sur trois.
Calculer la probabilité

- qu'elle soit surprise par la pluie sans parapluie (qu'elle n'ait pas son parapluie, sachant qu'il pleut);
- qu'elle ait emporté son parapluie inutilement (qu'elle ait son parapluie, sachant qu'il fait beau).

On considèrera les 3 événements $B =$"Il fait beau", $R =$"avoir son parapluie" et $W =$"la météo annonce du beau temps". De plus, on notera que le fait de prendre son parapluie ou pas dépend seulement de l'annonce météo et pas du temps qu'il fera, i.e., $\mathbb{P}(R \mid W \cap B) = \mathbb{P}(R \mid W)$.

Exercice 1.7. On rappelle la formule de Bayes, appelée aussi probabilité des causes. Soit $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ un système complet d'événements (i.e., $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$). Soit B un événement quelconque. alors, pour tout $i =, ..., n$, on a

$$\mathbb{P}(A_i \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B \mid A_i)}{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A_j)\mathbb{P}(B \mid A_j)}$$

i) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Soient A et B deux événements quelconques de $\mathcal{A}$. Démontrer la *formule des probabilités totales*:

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(\overline{B})P(A|\overline{B}) \ .$$

ii) Parmi les bus quittant la station centrale de Toulon, 60% sont des bus de la RMTT et le reste sont des bus de la SODETRAV. On sait que 3% des bus RMTT et 4% des bus SODETRAV sont contrôlés. Trouver la probabilité qu'un bus quittant la station
a) soit contrôlé (utiliser par exemple i)).
b) soit un bus RMTT sachant qu'il est contrôlé (utiliser la *formule de Bayes*).

2. Variables aléatoires

Exercice 2.1. Soit X le nombre de points obtenus en lançant un dé (non pipé). Calculer l'espérance et la variance de X. Généraliser à la somme des points obtenus en jetant 2, puis n dés.

Exercice 2.2. Un sac contient 4 jetons rouges, numérotés 0, 1, 2, 3, et 3 jetons bleus, numérotés 1, 2, 3. Les jetons sont indiscernables au toucher. On extrait simultanément deux jetons du sac. Soit X la variable aléatoire égale à la somme des deux numéros obtenus. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

Exercice 2.3. On jette trois dés truqués: un dé blanc, dont 4 faces ont 2 points et 2 faces ont 5 points; un dé rouge, dont 4 faces ont 4 points et 2 faces ont 1 point; et un dé noir, dont toutes les faces ont 3 points. On note, respectivement, X_b, X_n et X_r le nombre de points indiqués par le dé blanc, noir et rouge. Calculer

$$\mathbb{P}(X_b \geqslant X_r), \quad \mathbb{P}(X_r \geqslant X_n), \quad \mathbb{P}(X_n \geqslant X_b).$$

Exercice 2.4. Un questionnaire à choix multiples comporte 10 questions, offrant chacune trois réponses (dont une seule est correcte). Soit X le nombre de réponses justes obtenues par un étudiant répondant au hasard à chaque question. Quelle est la loi de X? Déterminer

- l'espérance de X;
- son écart-type;
- la probabilité que l'étudiant ne donne aucune réponse juste.
- la probabilité qu'il donne plus de 6 réponses justes.

Exercice 2.5. On vous propose le jeu suivant: vous misez une somme de votre choix. Deux tétraèdres, dont les faces sont numérotées 1, 2, 3, 4, sont jetés simultanément de manière indépendante.

- Si les deux tétraèdres indiquent le même nombre, vous récupérez 5 fois votre mise.
- Si les nombres diffèrent d'un point, vous perdez votre mise.
- Si les nombres diffèrent de deux ou trois points, respectivement, vous devez encore payer le double ou le triple de la mise.

Calculer l'espérance et la variance du gain. Comment faudrait-il modifier la somme gagnée pour que le jeu soit équitable?

Exercice 2.6. Une urne contient une boule blanche et une noire. A trois reprises, on tire une boule dans l'urne, puis on la remet en ajoutant une deuxième boule de la même couleur. Soit X le nombre de boules blanches se trouvant dans l'urne après les trois tirages. Déterminer sa loi et son espérance. Peut-on généraliser à k tirages? Que se passe-t-il si l'urne contient initialement une boule blanche et deux boules noires?

Exercice 2.7. Un archer disposant de k flèches effectue des tirs répétés jusquà ce qu'il ait soit atteint la cible, soit épuisé ses flèches. Sachant que le tireur atteint la cible avec probabilité p lors de chaque tir, et que ceux-ci sont indépendants, déterminer la probabilité qu'il n'atteigne jamais la cible, la loi et l'espérance du nombre de tirs effectués.
On rappelle que pour tout $z \neq 1$,

$$1 + z + \cdots + z^{k-1} = \frac{1 - z^k}{1 - z}.$$

Exercice 2.8. Dans une expérience consistant à jeter deux tétraèdres parfaitement symétriques, on considère les variables aléatoires X, égale à la somme des points, et Y, égale à leur différence (en valeur absolue). Déterminer

- la loi conjointe de X et Y,
- les lois (marginales) de X et Y, leur espérance et leur variance,
- la covariance de X et Y,
- la variance de $X + Y$.

Exercice 2.9. Une urne contient r boules rouges et b boules blanches. On tire successivement k boules, sans remise ($k \leqslant r + b$).

- Soit X_i la variable aléatoire valant 1 si la $i$ème boule est rouge, 0 sinon. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X_1, de X_2, puis de X_i pour $i = 3, \dots, k$.
- Soit $X = X_1 + \cdots + X_k$ le nombre de boules rouges tirées. Calculer son espérance, puis sa loi (loi hypergéométrique).
- Déterminer la covariance de X_i et X_j pour $i \neq j$, et en déduire la variance de X.

3. Les théorèmes limite

Exercice 3.1. Parmi les pièces produites par une chaîne de montage, 10% sont défectueuses. Estimer la probabilité que parmi 400 pièces, plus de 50 soient défectueuses.

Exercice 3.2. Dans une petite ville, 1000 cinéphiles choisissent chaque vendredi soir de se rendre dans l'un des deux cinémas. Le premier cinéma a 450 places, l'autre en a 470. Si le cinéma choisi est complet, ils retournent chez eux et regardent "Star Academy" (on suppose que chaque cinéphile choisit l'un des 2 cinémas avec la même probabilité, et de façon indépendante du choix des autres cinéphiles).

1. Estimer la probabilité que le premier cinéma soit complet, celle que le second cinéma soit complet.
2. Afin d'augmenter leurs recettes, les gérants des deux cinémas décident d'agrandir leurs salles. Combien chaque cinéma devrait-il avoir de places (au minimum) pour que la probabilité qu'un client trouve le cinéma complet soit inférieur à 1%?

Exercice 3.3. Calculer la probabilité que dans un amphi de n étudiants, au moins deux étudiants aient leur anniversaire le même jour. On admettra que chaque année compte 365 jours, et que les anniversaires sont distribués de manière uniforme. Donner une approximation de la probabilité pour $n \ll 365$,

1. en faisant un développement limité en $\epsilon = n/365$;
2. en utilisant la formule de Stirling.

Quel doit être le nombre n d'étudiants pour qu'il y ait au moins une chance sur deux pour qu'ils soient deux à avoir leur anniversaire le même jour?

Exercice 3.4. Admettons que lorsqu'on arrondit un nombre réel à l'entier le plus proche, l'erreur commise soit une variable aléatoire distribuée uniformément sur l'intervalle $]-1/2, 1/2[$. On arrondit $n = 75$ nombres réels à l'entier le plus proche et on calcule la somme. Quelle est la probabilité que l'écart entre la somme ainsi obtenue et la somme exacte des n nombres soit supérieur à 2.5?

Exercice 3.5. Des ingénieurs estiment que W, le poids (en tonnes) qu'une travée de pont peut supporter sans subir de dommages au niveau de sa structure, suit une loi normale de moyenne 4400 et décart type 40. Supposons que le poids (en tonnes) d'un véhicule passant sur ce pont est une variable aléatoire normale de moyenne 3 et d'écart type 0.3.

On rappelle que si $X = \mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$ *et* $Y = \mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$*, alors*

$$X+Y = \mathcal{N}(m_1+m_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}) \quad et \quad X-Y = \mathcal{N}(m_1-m_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$$

i) Donner la loi de la variable aléatoire K_n qui donne le poids en tonnes de n véhicules.
ii) Que modélise l'événement $\{W - K_n < 0\}$?
iii) Combien de voitures devraient se trouver sur cette travée pour que la probabilité de dommage de structure soit supérieure à 0.1?

Exercice 3.6. Un détaillant vend un produit à l'unité. Le temps qui s'écoule entre deux ventes consécutives est une variable aléatoire de moyenne égale à une semaine et d'écart-type égal à une semaine. Au moment de la dernière vente, le détaillant a constaté qu'il lui restait 36 unités. S'il doit se réapprovisionner seulement dans 6 mois (26 semaines), quelle est la probabilité que son stock ne soit pas épuisé avant le réapprovisionnement ?

Exercice 3.7. *Méthode de Monte-Carlo* Soit g une fonction réelle continue sur $[0, 1]$, et soit $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$. Expliciter $\mathbb{E}(g(X_n))$. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$ on a

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(X_k(\omega)) - \int_0^1 g(x)dx\right| < \epsilon\right\} = 1 \ .$$

En quoi cette formule peut-elle être utile pour le calcul de $\int_0^1 g(x)dx$?

Exercice 4.1. Lois à densité usuelles

i) *Loi uniforme.*
On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $[a, b]$ $(-\infty < a < b < +\infty)$, de densité

$$f(x) = \frac{1}{b-a} 1\!\mathrm{I}_{[a,b]}(x).$$

Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathrm{Var}(X)$ et la fonction génératrice g de X.
ii) *Loi normale (ou loi de Laplace-Gauss)* $\mathcal{N}(m, \sigma)$.
On considère une variable aléatoire X qui suit la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$ de densité

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right).$$

Dans le cas $m = 0$ et $\sigma = 1$, calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathrm{Var}(X)$ et la fonction génératrice g.
iii) *Loi Log-normale.*
On considère une variable aléatoire X qui suit la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$. La variable aléatoire $Y = \mathrm{e}^X$ suit alors une loi appelée Log-normale. Considérons le cas particulier $m = 0$ et $\sigma = 1$, et calculer la fonction de répartition $F_Y(x) := \mathbb{P}\{Y \leq x\}$ en fonction de la fonction de répartition de X. En déduire que la densité de Y est $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} \exp\left(-\frac{1}{2}\log^2 x\right) 1\!\mathrm{I}_{]0,+\infty[(x)}$.
iv) *Loi exponentielle* $\mathcal{E}(\lambda)$.
Soient $\lambda > 0$ et la variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre λ, de densité

$$f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} 1\!\mathrm{I}_{]0,+\infty[}(x).$$

Calculer l'espérance $\mathbb{E}(X)$, la variance $\mathrm{Var}(X)$, et la fonction génératrice g de X.

Si X suit une loi $\mathcal{E}(\lambda)$, montrer que $Y = [X]$ (partie entière de X) suit une loi géométrique, i.e., une loi discrète définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $\mathbb{P}\{Y = n\} = pq^n$, où $q := \mathrm{e}^{-\lambda}$. Montrer que la variable aléatoire $U = \mathrm{e}^{-\lambda X}$ suit la loi uniforme sur $]0, 1[$.
v) *Première loi de Laplace.*
Soit une variable aléatoire X qui suit une loi à densité

$$f(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|},\ x \in \mathbb{R}.$$

Pour $u \in]-1,1[$, montrer que la fonction génératrice g de X vérifie $g(u) = \frac{1}{1-u^2}$. En déduire $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.

vi) *Loi de Cauchy.*

Soit une variable aléatoire X qui suit une loi à densité

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Calculer $\mathbb{E}(X)$. Peut-on calculer $\mathrm{Var}(X)$? Soit V une variable aléatoire uniformément distribuée sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et soient $Y = \tan V$, $Z = 1/\tan V$. Calculer $\mathbb{P}\{Y \leq x\}$ et en déduire que Y suit la loi de Cauchy. Montrer de même que Z suit la loi de Cauchy.

vii) *Loi gamma* $\Gamma(p, \lambda)$*.*

Soient $p > 0$ et $\lambda > 0$. On considère la loi gamma de densité

$$f(x) = \frac{\lambda}{\Gamma(p)} \mathrm{e}^{-\lambda x}(\lambda x)^{p-1}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x).$$

Montrer que $\mathbb{E}(X) = \frac{p}{\lambda}$ et $\mathrm{Var}(X) = \frac{p}{\lambda^2}$.

Exercice 4.2. Soient X et Y deux variables aléatoires, et h la densité du couple définie par

$$h(x,y) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-y} & \text{si } 0 < x < y \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

i) Vérifier que h est une densité de probabilité.
ii) Calculer les densités marginales f de X et g de Y.
iii) Est-ce que X et Y sont indépendantes?
iv) Calculer $P\left\{\frac{X}{Y} \leq z \text{ et } Y \leq y\right\}$; en déduire la loi de $\frac{X}{Y}$.
v) Est-ce que X/Y et Y sont des variables aléatoires indépendantes?

Exercice 4.3. Deux amis ont rendez-vous à midi; Des causes de retard indépendantes font que chacun arrive entre 12h et 13h. La probabilité d'arrivée de chacun d'eux dans un intervalle de temps donné étant proportionnelle à la longueur de cet intervalle, quelle est la probabilité que les deux amis se rencontrent si chacun attend au plus 1/4 d'heure (On pourra construire deux variables aléatoires réelles continues indépendantes X_1 et X_2 qui donnent respectivement le temps de retard de chacun des deux amis).

Exercice 4.4. Soient X, Y et Z trois variables aléatoires réelles indépendantes. On suppose que X suit la loi uniforme sur $[0, 1]$ et que Y et Z suivent la loi exponentielle de paramètre 1.

i) Déterminer la loi du couple (Y, Z) et la loi du couple (X, Y).
Indication. On cherche une loi à densité de la forme $f(x, y)$ telle que

$$P\big((Y,Z) \in [a,b] \times [c,d]\big) = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dx \right) dy \ .$$

ii) Déterminer la loi de $Y + Z$ puis la loi de $X + Y$.

Exercice 4.5. Un contre-exemple.

Soient X et U deux variables aléatoires indépendantes telles que X suit la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$, et U suit une loi binômiale de paramètre 1/2: $\mathbb{P}\{U = -1\} = \mathbb{P}\{U = 1\} = 1/2$. On définit la variable aléatoire $Y = UX$. Montrer que $Y = \mathcal{N}(0, 1)$. Montrer que $\mathbb{E}(XY) = 0 = \mathbb{E}(X)E(Y)$. Montrer que X et Y ne sont pas indépendantes (On rappellera la définition d'indépendance de deux variables aléatoires X et Y, ainsi que la caractérisation de cette propriété à l'aide des espérances).

Exercice 4.6. Le paradoxe de Bertrand.

Une corde dans un cercle $\mathcal{C}$ est un segment AB dont les extrémités A et B sont sur le cercle $\mathcal{C}$. Supposons que l'on trace au hasard une corde dans le cercle de centre 0 et de rayon 1 (cercle unité). Nous allons chercher à évaluer la probabilité de l'événement

$$\mathfrak{E} = \text{“la longueur } L \text{ de la corde } AB \text{ est supérieure à } \sqrt{3}\text{”}$$

On va montrer que cette probabilité va (bien sûr) dépendre de la façon dont on choisit aléatoirement la corde.

Remarque préliminaire: Si on se donne un point I dans le disque unité, on peut construire une corde en considérant d'abord la droite OI (où O est le centre du cercle), et sa perpendiculaire (AB) passant par I et coupant le cercle aux points A et B. On obtient alors la corde AB (faites un dessin).

i) Montrer que si on prend un point I dans le disque unité, et qu'on construit la corde associée de la façon décrite ci-dessus, alors la longueur L de cette corde est supérieure à $\sqrt{3}$ si et seulement si le point I est dans le disque de centre O et de rayon 1/2.

ii) On suppose que le point I est pris au hasard équiprobablement dans le disque unité $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, i.e., on suppose que les coordonnées cartésiennes (X, Y) de I sont distribuées suivant la loi conjointe uniforme de densité $f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{1}{\pi}\mathbb{1}_D(x, y)$. Montrer que dans ce cas $\mathbb{P}\{\mathfrak{E}\} = \frac{1}{4}$.

iii) On suppose que le point I est construit en choisissant ses coordonnées polaires (R, Θ) de façon indépendante, et uniforme; i.e., R suit la loi uniforme sur $[0,1]$ et Θ suit la loi uniforme sur $[0, 2\pi]$. Montrer que dans ce cas $\mathbb{P}\{\mathfrak{E}\} = \frac{1}{2}$.

iv) On suppose cette fois que la corde AB est construite en choisissant au hasard et indépendamment les points A et B, chacun d'eux étant repéré par la coordonnée angulaire de ses coordonnées polaires. Comme la longueur de la corde reste invariante par rotation, on peut supposer que le point B est toujours situé en $(r, \theta) = (1, 0)$. Le point A est alors repéré par ses coordonnées polaires $(1, \alpha)$, où α est la variable aléatoire angle qui suit une loi uniforme sur $[0, 2\pi]$. Montrer que la longueur de l'arc L est supérieure à $\sqrt{3}$ si et seulement si $2\pi/3 < \alpha < 4\pi/3$. En déduire que $\mathbb{P}\{\mathfrak{E}\} = \frac{1}{3}$.

Exercice 4.7. Soient X et Y deux v.a. indépendantes de loi de probabilité à densité.
On note $f_X(x)$ et $f_Y(x)$ les densités respectives.
i) Si X et Y sont uniformement distribués sur $]0,1[$, (i.e. $f_X(x) = f_Y(x) = \chi_{]0,1[}(x)$), trouver la densité de probabilité de $Z = X + Y - [X + Y]$. ($[x]$ est la fonction partie entière de x).
ii) Si X et Y sont deux v.a. normales, centrées, réduites et indépendantes, trouver les lois de $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ et $\theta = \mathrm{Arctg}(Y/X)$. En déduire que R et θ sont indépendants.

Exercice 4.8. Soient X, Y deux variables aléatoires réelles indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, suivant la loi uniforme sur $[0,1]$, notée ν_u. On pose $Z = X^2 + Y^2$ si $X^2 + Y^2 \leq 1$ et $Z = 0$ sinon.

Montrer que pour toute fonction f borélienne, positive, définie sur $\mathbb{R}$ on a

$$E[f(Z)] = \frac{\pi}{4} \int_0^1 f(r)dr + (1 - \frac{\pi}{4})f(0)$$

Indication : Ecrire Z sous la forme $g(X, Y)$ pour une fonction g que l'on explicitera puis on utilisera les coordonnées polaires. En déduire que la loi ν_Z de Z est donnée par $\nu_Z = \dfrac{\pi}{4}\nu_u + (1 - \dfrac{\pi}{4})\delta_0$, où δ_0 est la mesure de Dirac en 0, i.e. c'est une loi de probabilité sur $\mathbb{R}$ qui vérifie

$$\delta_(0)(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } A \text{ contient } 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

5. Marches aléatoires

Exercice 5.1. On dispose d'une somme de 10 euros et on joue avec une machine à sous. A chaque partie, on met 1 euro dans la machine. Celle-ci rend soit 2 euros soit rien, de façon équiprobable.

i) Modéliser ce problème à l'aide d'une marche aléatoire S_k.

ii) Soit N le nombre de fois que l'on peut jouer jusqu'à ce qu'on n'ait plus d'argent. Donner la loi de la variable aléatoire N.

iii) Calculer la probabilité qu'on joue un nombre de fois inférieur ou égal à 20.

Exercice 5.2. Lors de l'élection présidentielle américaine de 2004, Bush et Kerry ont obtenu un nombre de voix dans l'état de l'Ohio respectivement égal à r et d ($r > d$) (le nombre de vote total étant alors égal à $r + d$; on ne comptera pas les votes nuls ou blancs).

i) On suppose que le dépouillement des votes se fait un à un et on cherche à estimer la probabilité de l'événement $E =$"Bush est resté en tête tout au long du décompte". On modélise ce probllème de la façon suivante. Soit (X_i) une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, telles que $X_i = 1$ si lors du dépouillement le $i$ème vote est pour Bush, et $X_i = -1$ s'il est pour Kerry. Soit $S_j = \sum_{i=1}^{j} X_i$ la marche aléatoire qui représente la différence entre les votes républicains et les votes démocrates à l'étape j du dépouillement. Soit $A = \{\omega \in \Omega \text{ t.q. } S_{d+r}(\omega) = r-d, S_1(\omega) > 0,\ S_2(\omega) > 0, \cdots, S_{r+d-1}(\omega) > 0\}$. Montrer (à l'aide d'une représentation graphique si nécessaire) que l'on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{E\} &= \mathbb{P}\{A \mid S_{r+d} = r - d\} \\ &= \frac{\text{nbre de chemins partant de } (0,0) \text{ et arrivant à } (r+d, r-d) \text{ sans couper l'axe des abscisses}}{\text{nombre de chemins qui partent de } (0,0) \text{ et arrivent à } (r+d, r-d)}\end{aligned}$$

En particulier, vérifier que $\mathbb{P}\{E\}$ ne dépend pas de la valeur $p := \mathbb{P}\{X_1 = 1\}$

ii) Dans la suite, d'après le résultat du i), on supposera $p = 1/2$ et on appellera S_j la marche aléatoire symétrique correspondante qui mesure l'écart des votes entre les deux candidats au $j^{\text{ème}}$ dépouillement. En posant $k = r + d$ et $n = r - d$:

- montrer

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\{S_1 > 0,\ S_2 > 0,\ \cdots, S_{k-1} > 0,\ S_k = n\} \\ &\quad = \mathbb{P}\{S_1 = 1, S_k = n) - \mathbb{P}\{S_1 = 1, S_k = n,\ \exists j, S_j = 0\}.\end{aligned}$$

- montrer

  $$\mathbb{P}\{S_1 = 1,\ S_k = n,\ \exists j, S_j = 0\} = \mathbb{P}\{S_1 = 1,\ S_k = -n\}$$

  (faire un dessin et visualiser le nombre de chemins des deux événements).
- à l'aide de ce qui précède, montrer:

  $$\mathbb{P}\{S_1 > 0,\ S_2 > 0, \cdots, S_{k-1} > 0,\ S_k = n\}$$
  $$= \tfrac{1}{2}\left(\mathbb{P}\{S_k = n \mid S_1 = 1\} - \mathbb{P}\{S_k = -n \mid S_1 = 1\}\right),$$

  et en déduire $\mathbb{P}\{S_1 > 0,\ \cdots,\ S_{k-1} > 0, S_k = n\}$ en fonction de n et k.

iii) Calculer $\mathbb{P}\{S_k = n\}$. En déduire, avec ii), que $\mathbb{P}\{E\} = \frac{r-d}{r+d}$.

Exercice 5.3. La ruine du joueur. Un joueur dispose d'une mise initiale de k euros. A chaque partie qu'il joue, il a une probabilité p d'augmenter sa mise de 1 et une probabilité $(1-p)$ de la diminuer de 1. Ce joueur se fixe comme objectif de jouer jusqu'à ce qu'il soit ruiné (mise =0) ou jusqu'à ce que son capital atteigne la somme de M euros (M étant un entier choisi à l'avance).

On veut calculer la probabilité de l'événement "le joueur est ruiné".

i) Modéliser le problème à l'aide d'une marche aléatoire S_k.

ii) Soit l'événement

$E_k =$

"Le capital du joueur atteint 0 avant d'atteindre la valeur M, pour une mise initiale k"

et soit

$$q_k = \mathbb{P}\{E_k\}.$$

a) Calculer q_0 et q_M.

b) Montrer la relation de récurrence

$$q_j = p\, q_{j+1} + (1-p) q_{j-1}.$$

En déduire que $(q_{j+1} - q_j) = \frac{1-p}{p}(q_j - q_{j-1})$, puis établir une relation entre $(q_{j+1} - q_j)$ et $(q_1 - q_0)$.

En utilisant les sommes télescopiques

$$q_M - q_0 = \sum_{j=0}^{M-1} (q_{j+1} - q_j)\ ,$$

montrer alors que

$$(q_1 - q_0) \sum_{j=0}^{M-1} \left(\frac{1-p}{p}\right)^j = -1, \tag{1}$$

et en déduire une expression simple de $(q_1 - q_0)$ en fonction de p.

iii) A nouveau à l'aide de sommes télescopiques, montrer que pour tout $K \in \{1, \ldots, M\}$,

$$q_K - q_0 = (q_1 - q_0) \sum_{j=0}^{K-1} \left(\frac{1-p}{p} \right)^j \tag{2}$$

iv) Déduire de (1) et (2) une expression de q_k en fonction de p (On considèrera les 2 cas $p = 1/2$ et $p \neq 1/2$). Vér ifier le résultat pour $K = M$.

v) Soit l'événement

$F_k =$ "Le capital du joueur atteint la valeur M
pour une mise initiale k" (avant d'être ruiné).

Pourquoi l'égalité $\Omega = F_k \cup E_k$ est-elle fausse?

Montrer par la même méthode que i) à iv) que l'on a

$$\mathbb{P}\{F_k\} = \begin{cases} \dfrac{((1-p)/p)^k - 1}{((1-p)/p)^M - 1} & \text{si } p \neq 1/2 \\[2ex] \dfrac{k}{M} & \text{si } p = 1/2 \end{cases}$$

et vérifier alors qu'on a quand même la relation

$$\mathbb{P}\{F_k\} + \mathbb{P}\{E_k\} = 1.$$

6. Processus de Poisson

Exercice 6.1. Supposons que les secousses sismiques dans la moitié ouest des Etats-Unis surviennent de manière telle qu'on puisse les décrire par un processus de Poisson $N(t)$ (t est le temps compté en semaines), de paramètre $\lambda = 2$.

i) Trouver la probabilité qu'au moins trois secousses aient lieu durant les deux prochaines semaines.

ii) Trouver la distribution de la durée, mesurée en semaines, entre maintenant et la prochaine secousse.

Exercice 6.2. Des clients arrivent dans une banque à un rythme poissonien de taux λ. Supposons que deux clients arrivent durant la première heure. Quelle est la probabilité que

- les deux soient arrivés durant les 20 premières minutes?
- L'un au moins soit arrivé pendant les 20 premières minutes?

Exercice 6.3. Un certain service nécessite la mise en place d'un dispositif technique. Admettons que la durée de vie T de ce dispositif est exponentielle de paramètre $\lambda = 1$. Dès qu'un dispositif tombe en panne, il est immédiatement remplacé par un élément identique afin de ne pas interrompre le service.

i) Quelle est la probabilité d'avoir plus de trois pannes dans un intervalle d'une durée de deux heures? (*Indication:* On commencera par construire un processus de Poisson $N(t)$ à l'aide de variables aléatoires T_i indépendantes et de même loi que celle T).

ii) Quelle est la distribution de l'instant d'occurence de la première panne sachant que le deuxième dispositif a été mis en marche et fonctionne encore à l'instant $t_0 = 3h$?

iii) Soit T_i la variable aléatoire qui représente le temps écoulé entre la $(i-1)$ème panne et la $i$ème panne. On suppose maintenant que l'on ne possède que 9 dispositifs. Soit l'événement $E =$ "le temps total de service S est au moins égal à 12h"?

iii-a) Exprimer $\mathbb{P}\{E\}$ à l'aide du processus $N(t)$, puis à l'aide des T_i.

iii-b) Donnez une valeur approchée de $\mathbb{P}\{E\}$ en utilisant le théorème de la limite centrale.

Exercice 6.4. Le long d'une route, l'écoulement des voitures peut être décrit par un processus de Poisson $N(t)$ de paramètre $\lambda = 2$: $N(t) =$ variable aléatoire nombre de véhicules entre les instants 0 et t (mesurés en minutes) arrivant à un point donné. A cause de travaux, le traffic est arrêté alternativement pour chaque direction. On admet que le traffic se compose de la manière suivante:

60% de voitures légères	de 5m de longueur
30% de cars	de 10m de longueur
10% de longs véhicules	de 20m de longueur

i) D'après ce tableau, donner la longueur l moyenne d'un véhicule arrivant au point de travaux. (Réponse: $l = 8$m). Dans la suite, on supposera que tous les véhicules sont de longueur l.

ii) Pendant combien de temps peut-on arrêter le traffic si l'on désire que la queue ainsi formée ne dépasse une longueur de 250m qu'avec une probabilité de $0,2$? *Indication:* On écrira la condition sur le temps t cherché à l'aide de $N(t)$; puis en réexprimant cette condition à l'aide des v.a. indépendantes T_i qui mesurent le temps écoulé entre les arrivées au point de traffic de la $(i-1)$ème et de la $i$ème voiture, et à l'aide du théorème de la limite centrale, on donnera une estimation de ce temps t. (Réponse: $t \approx 13.2\,\mathrm{min}$).

Exercice 6.5. Le nombre $N(t)$ de versements d'indemnités effectués par une compagnie d'assurance en t jours est donné par un processus de Poisson de taux $\lambda = 4$ versements par jour. On appellera S_i les variables aléatoires qui représentent le temps écoulé, compté en jours, jusqu'au $i$ème versement. On suppose que le montant du $i$ème versement est une variable aléatoire Y_i qui suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ (i.e., $\mathbb{P}\{Y_1 = n\} = p(1-p)^{n-1},\ n \geq 1$). On fait l'hypothèse que les Y_i sont indépendants, et sont indépendants des $N(t)$ ($\forall t > 0$).

i) Sachant que $\mathbb{E}(Y_1) = 1000\,Euros$, calculer p. Calculer $\mathrm{Var}(Y_1)$.

ii) Soit $U_t = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{N(t)}$ la variable aléatoire qui représente les versements totaux effectués par la compagnie en t jours:

$$U_t : \begin{array}{lcl} (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) & \to & \mathbb{N} \\ \omega & \mapsto & Y_1(\omega) + Y_2(\omega) + \cdots + Y_{N(t)(\omega)}(\omega) \end{array}$$

(si $N(t)(\omega) = 0$, on pose $U_t(\omega) = 0$).

Soit $g_t(z)$ la fonction génératrice de U_t et $h(z)$ celle de Y_1. Montrer l'égalité

$$g_t(z) = \exp(\lambda t(h(z) - 1)).$$

En déduire la moyenne et la variance des sommes versées en $t = 5$ jours.

Exercice 6.6. Le nombre d'accidents qui se produisent par jour dans une ville donnée peut être décrit par une loi de Poisson de moyenne 2. Le nombre de personnes impliquées par accident est une variable aléatoire géométrique de paramètre 0.5. En utilisant la même approche que dans l'exercice précédent, calculer la moyenne et la variance du nombre de personnes accidentées par semaine.

Exercice 6.7. Reprendre l'exercice 6.4 en modélisant la longueur des véhicules par une variable aléatoire discrète prenant les valeurs $\{5, 10, 20\}$ avec des probabilités respectives 0.6, 0.3 et 0.1.

7. Chaînes de Markov - Chaînes de Markov absorbantes

Exercice 7.1. Au pays d'Oz, il n'y a jamais deux jours consécutifs avec du soleil. Si un jour il y a du soleil, il y a une chance sur deux pour que le lendemain il pleuve et une chance sur deux qu'il neige. S'il y a de la neige ou de la pluie, il y a une chance sur deux pour que le lendemain il y ait le même temps. Lorsqu'il y a un changement de temps de neige (ou pluie) vers un autre temps, il n'y a qu'une chance sur deux que ce soit du soleil.

i) Décrire le problème à l'aide d'une chaîne de Markov dont on donnera la matrice de transition.

ii) Donner la probabilité d'avoir du beau temps le troisième jour, sachant que le premier jour il y avait du soleil. Quelle est la probabilité d'avoir du mauvais temps le 3ème jour, sachant que le premier jour il y avait du soleil.

iii) De façon générale, donner la probabilité d'avoir du soleil le $n$ème jour sachant

a) qu'il faisait beau le premier jour.

b) qu'il pleuvait le premier jour

c) qu'il neigeait le premier jour.

Exercice 7.2. On étudie un caractère donné d'un animal lors de croisements successifs. Le caractère observé sur l'animal est donné par deux gènes, l'un dominant (G) et l'autre récessif (g). Quand l'animal a les deux gènes (GG), (Gg) ou (gG), le caractère observé est le même; on l'appellera *caractère 1.* Par contre, lorsque les deux gènes sont gg, on observe sur l'animal le *caractère 2.*

Les trois paires de gènes possibles sont donc (GG): purement dominant; (Gg): hybride (équivalent à (gG)); et (gg): purement récessif.

Chaque animal hérite d'un gène de chacun de ses parents; Les gènes des parents, quels qu'ils soient, sont transmis de façon équiprobable.

i) En supposant que chaque nouveau-né est systématiquement croisé avec un animal hybride, construire une chaîne de Markov qui décrive le caractère des individus d'une même descendance (on décrira en fait les paires de gènes, car elles permettent de déduire le caractère). Donner la matrice de transition P associée.

ii) Donner la probabilité qu'à la génération $n = 2$ l'individu soit purement récessif, sachant que le premier individu était purement dominant. Même question pour $n = 3$. Même question pour n quelconque.

Exercice 7.3. Dans une production en série, les articles passent par 3 étapes de fabrication; ils sont inspectés à la fin de chaque étape. Ils peuvent alors présenter trois états possibles:

- totalement défectueux; probabilité p; dans ce cas l'article est jeté.

- légèrement défectueux; probabilité q; dans ce cas il passe une seconde fois par la même étape.

- en bon état, probabilité $r = 1 - p - q$; l'article passe à l'étape suivante ou quitte le processus de fabrication avec le label "en bon état" s'il était dans la 3ème étape de fabrication.

i) Décrivez ce processus par une chaîne de Markov à 5 états: { "être dans l'étape 1", "être dans l'étape 2 ", "être dans l'étape 3", "être jeté", "sortir de la chaîne de fabrication avec le label *en bon état*".}.

Construire la matrice de transition de ce processus. On suppose désormais $p = 0,1$ et $q = 0,3$. A-t-on une chaîne de Markov absorbante? Calculez la matrice fondamentale N (on pourra se contenter de donner les valeurs des éléments de matrice à 10^{-3} près).

ii) Trouver la durée moyenne, i.e. l'espérance, jusquà ce qu'un article quitte la machine; l'état initial étant ici "être dans l'étape 1". Trouver la probabilité qu'un article quittant la machine soit en bon état.

Exercice 7.4. Supposons que deux joueurs jouent à pile ou face. Peu importe qui des deux lance la pièce, la probabilité d'obtenir pile ou face étant la même. Le jeu s'arrête lorsque l'on obtient dans 3 jets consécutifs PFP (le joueur A gagne) ou FFF (le joueur B gagne).

i) En considérant comme ensemle fini $\mathfrak{X}$ les valeurs possibles de trois jets consécutifs, faire un schéma des probabilités de transition entre tous les états. Ecrire la matrice de transition associée de telle façon que la matrice soit sous la forme canonique $\begin{pmatrix} Q & R \\ 0 & I \end{pmatrix}$.

ii) Nous allons maintenant simplifier le problème en construisant un autre ensemble fini $\mathfrak{X}'$, de cardinal inférieur à celui de $\mathfrak{X}$. Soit

$$\mathfrak{X}' = \{(*P);\ (PF);\ (FF);\ (A \text{ gagne});\ (B \text{ gagne})\} = \{1, 2, 3, 4, 5\},$$

où (PF) signifie que les deux tirages précédents ont été *pile* puis *face*; $(*P)$ signifie que les deux tirages précédents sont soit *pile* puis à nouveau *pile*, soit *face* puis *pile*; etc.

Construire le schéma des probabilités de transition. Vérifier que $\mathfrak{X}'$ suffit à décrire toutes les situations. Ecrire la matrice de transition P associée. A-t-on une chaîne de Markov absorbante? Si oui, calculer la matrice fondamentale N.

iii) On prend comme distribution de départ, celle donnée par le vecteur

$$(\mathbb{P}\{(*P)\}, \mathbb{P}\{(PF)\}, \mathbb{P}\{(FF)\}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}).$$

Calculer le nombre moyen de jets jusqu'à ce qu'un joueur gagne. Donner la probabilité de gagner pour chacun des joueurs.

Exercice 7.5. Dans le modèle économique de Leontief[1], on considère n industries $1, 2, \cdots, n$. La $i$ème industrie a besoin d'un montant $0 \leq q_{ij} \leq 1$ de biens (en dollars) de chaque compagnie j pour fabriquer un bien de valeur 1 dollar. La demande extérieure (i.e., autre que celle des industries entre elles), en dollars, est donnée par le vecteur $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \cdots, d_n)$. Soit Q la matrice $n \times n$ de coefficients (q_{ij}).

i) Montrer que si les industries produisent un montant total donné par le vecteur

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

(i.e., chaque industrie i produit x_i), alors le montant total de biens de chaque type dont les industries on besoin est donné par le vecteur

$$\mathbf{x}Q.$$

(On pourra commencer par récapituler la demande faite à l'industrie 1 par chaque industrie 1 à n; faire de même pour l'industrie 2, puis 3, etc.)

ii) Montrer alors que pour satisfaire une demande extérieure $\mathbf{d}$, ainsi que la demande interne, les industries doivent produire un montant total donné par le vecteur $\mathbf{x}$ qui satisfait l'équation

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}Q + \mathbf{d}.$$

iv) Montrer que si Q est la matrice Q d'une chaîne de Markov absorbante de matrice de transition $P = \begin{pmatrix} Q & R \\ 0 & I \end{pmatrix}$, alors il est possible de satisfaire n'importe quelle demande extérieure $\mathbf{d}$.

v) Supposons que la somme sur chaque ligne de Q est inférieure ou égale à 1. Donnez une interprétation économique de cette condition. Formez une chaîne de Markov en prenant pour états les industries, avec probabilités de transition q_{ij}, et en rajoutant un état absorbant noté $n+1$. On pose

$$q_{i,n+1} = 1 - \sum_{j=1}^{n} q_{ij}.$$

[1] W.W. Leontief, *Inpout-Output Economics* (Oxford: Oxford University Press, 1966)

Montrez que cette chaîne est absorbante si pour toutes les entreprises, soit elles font un profit, soit elles dépendent uniquement, pour la fabrication de leur produit, d'une entreprise qui fait du profit (on commencera par traduire ce que chacune de ces conditions signifie en terme des coefficients q_{ij}).

vi) Pour ce modèle, définir le produit national brut $\mathbf{X}$. Trouver une expression du P.N.B. en fonction du vecteur demande $\mathbf{d}$ et du vecteur $\mathbf{t}$ qui donne les temps moyens d'absorption.

8. Chaînes de Markov ergodiques

Exercice 8.1. Parmi les matrices suivantes, quelles sont celles qui sont des matrices de transition de chaînes de Markov ergodiques? régulières?

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/5 & 4/5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Exercice 8.2. Soit la matrice:

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

i) Montrer que c'est la matrice de transition d'une chaîne de Markov régulière.
ii) Si le processus commence dans l'état 1, trouver la probabilité qu'il soit dans l'état 3 après 2 étapes.
iii) Calculer la distribution stationnaire w. En déduire les temps de récurrence moyens dans chacun des états 1, 2 et 3.

Exercice 8.3. (c.f. exercice 1 du TD 7) Au pays d'Oz, il n'y a jamais deux jours consécutifs avec du soleil. Si un jour il y a du soleil, il y a une chance sur deux pour que le lendemain il pleuve et une chance sur deux qu'il neige. S'il y a de la neige ou de la pluie, il y a une chance sur deux pour que le lendemain il y ait le même temps. Lorsqu'il y a un changement de temps de neige (ou pluie) vers un autre temps, il n'y a qu'une chance sur deux que ce soit du soleil.

Pour $\mathfrak{X} = \{\mathbf{P}(luie), \mathbf{S}(oleil), \mathbf{N}(eige)\}$, la matrice de transition associée est:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

i) Calculer la distribution stationnaire w.
ii) En déduire les temps de récurrence moyens respectifs pour les états **P**, **S** et **N**.
iii) Que vaut le premier temps de passage moyen de **P** vers **S**.

Annexe A. Annales Examens

Contrôle continu de Probabilités - M55

Novembre 2004
Durée de l'examen: 2h
Calculatrices autorisées

Problème 1. i) Rappeler la définition d'une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$.

ii) Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[0, 1]$. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.

iii) Soit Y une variable qui suit la loi uniforme sur $[0, 1]$. On suppose de plus que Y est indépendante de X. Donner la loi de $X+Y$. Calculer $\mathbb{E}(X+Y)$. Donner la loi de $X-Y$.

iv) Application: Deux amis ont rendez-vous à midi; Des causes de retard indépendantes font que chacun arrive entre 12h et 13h. La probabilité d'arrivée de chacun d'eux dans un intervalle de temps donné étant donnée par une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[0, 1]$ (0 correspond à midi et 1 correspond à 13h). Quelle est la probabilité que les deux amis se rencontrent si chacun attend au plus 1/4 d'heure?

Problème 2. Un astronome souhaite mesurer la distance d, en années lumière, entre son observatoire et une étoile lointaine. Bien qu'il connaisse une technique de mesure, il sait aussi que chaque résultat ne constitue qu'une valeur approchée de la distance réelle d, en raison des influences atmosphériques et des erreurs des appareils de mesure. Par conséquent, notre astronome prévoit d'effectuer un nombre N de mesures et d'accepter leur moyenne comme estimation de la distance réelle. Il a des raisons de penser que les différentes valeurs mesurées sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, d'espérance commune d (d est la distance réelle), et de variance commune estimée à 4 (l'unité étant l'année lumière).

i) Soit X_i la variable aléatoire qui décrit la $i$ème mesure. A l'aide des X_i et de d, écrire l'événement

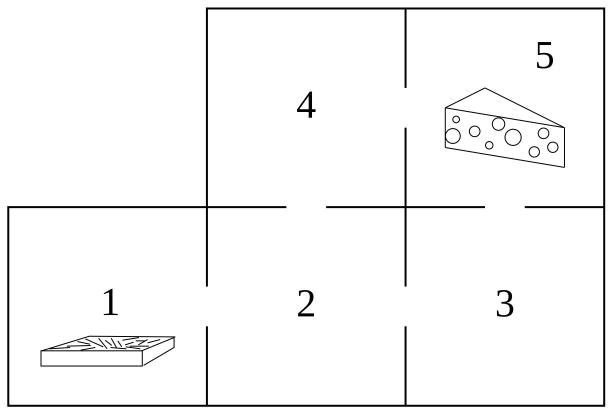
"La valeur moyenne de N observations est distante de d de 0,5 au plus"

ii) A l'aide du théorème de la limite centrale, estimer la valeur N minimale pour que la moyenne des N mesures effectuées s'écarte de la valeur réelle d au plus de 0,5 années lumière, avec une probabilité de 95%.

Examen de Probabilités - M55

Vendredi 14 janvier 2005
Durée de l'examen: 2h

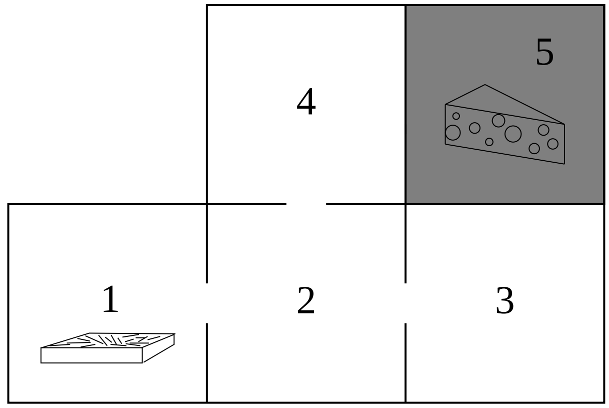
Problème 1. Une souris vit dans le labyrinthe représenté ci-dessous.



En 1 se trouve sa tanière, en 5 on a mis de la nourriture. On suppose que lorsque la souris se trouve dans l'une des cases 2, 3 ou 4, elle choisit au hasard, de manière équiprobable, l'une des portes permettant de quitter la case. Si elle arrive dans sa tanière ou dans la case contenant de la nourriture, elle y reste. L'unité de temps est le temps mis pour aller d'une case à l'autre.

(1) **(3pt)** Décrire le cheminement de la souris par une chaîne de Markov. Montrer que cette chaîne est absorbante. Ecrire la matrice de transition sous sa forme canonique.
(2) **(3pt)** Calculer la matrice fondamentale de la chaîne.
(3) **(3pt)** On place la souris dans la case 4. Calculer le nombre moyen de pas jusqu'à ce qu'elle atteigne soit la nourriture, soit sa tanière.
(4) **(3pt)** On place la souris dans la case 4. Avec quelle probabilité atteint-elle sa tanière?

Question subsidiaire: (4pt) On ferme les portes de la case 5. On suppose maintenant que si la souris atteint sa tanière, elle en repart aussitôt (c.f. figure ci-dessous).



Quelle est la distribution invariante du processus? Si elle part de sa tanière, après combien de temps, en moyenne, la souris y revient-elle pour la première fois?

Problème 2. Des voitures arrivent à une station service sous la forme d'un processus de Poisson $N_{]0,t]} = N_t$, de paramètre λ, qui mesure le nombre de voitures qui arrivent par heure à la station pour prendre du carburant.

(1) Si on sait que deux voitures exactement arrivent pendant la première heure, quelle est la probabilité
 (a) **(2pt)** que les deux arrivent pendant la première demi-heure
 (b) **(2pt)** qu'exactement une voiture arrive pendant la première demi-heure.

(2) On suppose dans toute cette question que $\lambda = 6$. On fait l'hypothèse que la valeur en euros de carburant pris par le i-ème automobiliste est donnée par une variable aléatoire discrète Y_i, d'espérance $\mathbb{E}(Y_i) = 20$. On suppose de plus que les variables aléatoires Y_i sont indépendantes, et indépendantes des variables $N_{]0,t]}$. Soit la variable aléatoire U_t qui mesure le montant en euros encaissé par la station service en t heures:

$$U_t : \begin{array}{lcl} (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) & \to & \mathbb{N} \\ \omega & \mapsto & Y_1(\omega) + Y_2(\omega) + \cdots + Y_{N(t)(\omega)}(\omega) \end{array}$$

(si $N(t)(\omega) = 0$, on pose $U_t(\omega) = 0$).

Soit $g_t(z) = \mathbb{E}(z^{U_t})$ la fonction génératrice de U_t et $h(z)$ la fonction génératrice de Y_1.

 (a) **(2pt)** Montrer l'égalité

$$g_t(z) = \exp(6\,t(h(z) - 1)). \tag{3}$$

 (b) **(2pt)** Rappeler la propriété qui relie la fonction génératrice d'une variable aléatoire discrète et l'espérance de cette variable aléatoire.

En déduire, à l'aide de l'égalité (3) ci-dessus, la moyenne des sommes encaissées pendant une journée de travail de $t = 12$ heures.