

Processus Stochastiques

Projets de simulation numérique

Modalités:

- Les étudiants travaillent par groupes de deux, chaque groupe traite un sujet différent. Les simulations peuvent être faites en FORTRAN, C, MATLAB, ou tout autre langage de votre choix.
- Un rapport de projet est à envoyer par e-mail à berglund@univ-tln.fr jusqu'au **vendredi 26 janvier 2007 12⁰⁰ heures** dernier délai.
- Le rapport doit être un document PDF ou Postscript (pas de Word, Powerpoint ou autre). Pensez à limiter la taille du fichier à une grandeur raisonnable (pas plus d'un Mb si possible).

Sujet 1

Soit l'EDS

$$\begin{aligned} dx_t &= y_t dt, \\ dy_t &= [x_t - ay_t - x_t^3] dt + \sigma dW_t, \end{aligned}$$

où a, σ sont des paramètres positifs.

1. Ecrire un programme permettant de simuler des trajectoires de cette équation. Représenter quelques trajectoires typiques pour différentes valeurs des paramètres.
2. Soit \mathcal{D} l'ensemble

$$\{(x, y) : 0 < x < \sqrt{2}, y^2 < x^2 - x^4/2\}.$$

Pour $x_0 = 1, y_0 = 0$, soit

$$\tau = \inf\{t > 0 : (x_t, y_t) \notin \mathcal{D}\}$$

le temps de première sortie de \mathcal{D} . Soit x_τ la position de x lors de cette première sortie. Etudier numériquement les lois de τ et de x_τ en fonction de a et σ .

Sujet 2

Soit l'EDS

$$\begin{aligned} dx_t &= [x_t - x_t^3 + y_t] dt + \sigma dW_t, \\ dy_t &= -ax_t dt, \end{aligned}$$

où a, σ sont des paramètres positifs.

1. Ecrire un programme permettant de simuler des trajectoires de cette équation. Représenter quelques trajectoires typiques pour différentes valeurs des paramètres.
2. Soit \mathcal{D} le disque

$$\{(x, y) : x^2 + y^2 < 2\}.$$

Pour $x_0 = 0, y_0 = 0$, soit

$$\tau = \inf\{t > 0 : (x_t, y_t) \notin \mathcal{D}\}$$

le temps de première sortie de \mathcal{D} . Soit φ_τ l'angle tel que $(x_\tau, y_\tau) = \sqrt{a}(\cos \varphi_\tau, \sin \varphi_\tau)$. Etudier numériquement les lois de τ et de φ_τ en fonction de a et σ .

Sujet 3

Soit l'EDS

$$\begin{aligned} dx_t &= y_t dt, \\ dy_t &= [-ay_t - \sin x_t] dt + \sigma dW_t, \end{aligned}$$

où a, σ sont des paramètres positifs.

1. Ecrire un programme permettant de simuler des trajectoires de cette équation. Représenter quelques trajectoires typiques pour différentes valeurs des paramètres.
2. Soit \mathcal{D} l'ensemble

$$\{(x, y) : -\pi < x < \pi, y^2 < 2(1 - \cos x)\}.$$

Pour $x_0 = 0, y_0 = 0$, soit

$$\tau = \inf\{t > 0 : (x_t, y_t) \notin \mathcal{D}\}$$

le temps de première sortie de \mathcal{D} . Soit x_τ la position de x lors de cette première sortie. Etudier numériquement les lois de τ et de x_τ en fonction de a et σ .

Sujet 4

Soit l'EDS

$$\begin{aligned} dx_t &= [x_t - x_t^3 + y_t] dt + \sigma dW_t, \\ dy_t &= [1 + a - x_t] dt, \end{aligned}$$

où a, σ sont des paramètres positifs.

1. Ecrire un programme permettant de simuler des trajectoires de cette équation. Représenter quelques trajectoires typiques pour différentes valeurs des paramètres.
2. Soit \mathcal{D} le disque

$$\{(x, y) : (x - 1 - a)^2 + y^2 < a^2\}.$$

Pour $x_0 = 1 + a, y_0 = 0$, soit

$$\tau = \inf\{t > 0 : (x_t, y_t) \notin \mathcal{D}\}$$

le temps de première sortie de \mathcal{D} . Soit φ_τ l'angle tel que $(x_\tau, y_\tau) = (1 + a + a \cos \varphi_\tau, a \sin \varphi_\tau)$. Etudier numériquement les lois de τ et de φ_τ en fonction de a et σ .

Sujet 5

Soit l'EDS

$$\begin{aligned} dx_t &= [x_t - x_t^3 + y_t] dt + \sigma dW_t, \\ dy_t &= [a - \tanh(10x_t) - y_t] dt, \end{aligned}$$

où a, σ sont des paramètres positifs.

1. Ecrire un programme permettant de simuler des trajectoires de cette équation. Représenter quelques trajectoires typiques pour différentes valeurs des paramètres.
2. Soit \mathcal{D} le rectangle

$$\{(x, y) : 1/\sqrt{3} < x < 1, |y| < 1\}.$$

Pour $x_0 = 1, y_0 = 0$, soit

$$\tau = \inf\{t > 0 : (x_t, y_t) \notin \mathcal{D}\}$$

le temps de première sortie de \mathcal{D} . Etudier numériquement les lois de τ et de y_τ en fonction de a et σ .

Sujet 6

Soit l'EDS

$$\begin{aligned} dx_t &= y_t dt + \sigma dW_t, \\ dy_t &= [ax_t - y_t - x_t^3] dt, \end{aligned}$$

où a, σ sont des paramètres positifs.

1. Ecrire un programme permettant de simuler des trajectoires de cette équation. Représenter quelques trajectoires typiques pour différentes valeurs des paramètres.
2. Soit \mathcal{D} l'ensemble

$$\{(x, y) : 0 < x < \sqrt{2a}, y^2 < ax^2 - x^4/2\}.$$

Pour $x_0 = 1, y_0 = 0$, soit

$$\tau = \inf\{t > 0 : (x_t, y_t) \notin \mathcal{D}\}$$

le temps de première sortie de \mathcal{D} . Soit x_τ la position de x lors de cette première sortie. Etudier numériquement les lois de τ et de x_τ en fonction de a et σ .

Sujet 7

Soit l'EDS

$$\begin{aligned} dx_t &= [\sin(x_t) + y_t] dt, \\ dy_t &= -(1 + a)x_t dt + \sigma dW_t, \end{aligned}$$

où a, σ sont des paramètres positifs.

1. Ecrire un programme permettant de simuler des trajectoires de cette équation. Représenter quelques trajectoires typiques pour différentes valeurs des paramètres.
2. Soit \mathcal{D} le disque

$$\{(x, y) : x^2 + y^2 < 2\pi\}.$$

Pour $x_0 = 0, y_0 = 0$, soit

$$\tau = \inf\{t > 0 : (x_t, y_t) \notin \mathcal{D}\}$$

le temps de première sortie de \mathcal{D} . Soit φ_τ l'angle tel que $(x_\tau, y_\tau) = \sqrt{2\pi}(\cos \varphi_\tau, \sin \varphi_\tau)$. Etudier numériquement les lois de τ et de φ_τ en fonction de a et σ .

Sujet 8

Soit l'EDS

$$\begin{aligned} dx_t &= y_t dt + \sigma dW_t, \\ dy_t &= [-y_t - \sin x_t + ax_t] dt, \end{aligned}$$

où a, σ sont des paramètres positifs.

1. Ecrire un programme permettant de simuler des trajectoires de cette équation. Représenter quelques trajectoires typiques pour différentes valeurs des paramètres.
2. Soit \mathcal{D} l'ensemble

$$\{(x, y) : -\pi < x < \pi, y^2 < 2(1 - \cos x)\}.$$

Pour $x_0 = 0, y_0 = 0$, soit

$$\tau = \inf\{t > 0 : (x_t, y_t) \notin \mathcal{D}\}$$

le temps de première sortie de \mathcal{D} . Soit x_τ la position de x lors de cette première sortie. Etudier numériquement les lois de τ et de x_τ en fonction de a et σ .