Processus Stochastiques

Projets de simulation numérique

Modalités:

- Chaque étudiant traite un sujet différent. Les simulations peuvent être faites en FORTRAN, C, MATLAB, ou tout autre langage de votre choix.
- Un rapport de projet est à envoyer par e-mail à `berglund@univ-tln.fr` jusqu'au **vendredi 6 janvier 2006 12^{00} heures** dernier délai.
- Le rapport doit être un document PDF ou Postscript (pas de Word, Powerpoint ou autre). Pensez à limiter la taille du fichier à une grandeur raisonnable.

Sujet 1

Soit l'EDS

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x_t &= \left[-\Omega y_t + x_t^3 - a^2 x_t\right] \mathrm{d}t \;, \\ \mathrm{d}y_t &= \Omega x_t \,\mathrm{d}t + \sigma \,\mathrm{d}W_t \;, \end{aligned}$$

où a, Ω, σ sont des paramètres positifs.

1. Ecrire un programme permettant de simuler des trajectoires de cette équation. Représenter quelques trajectoires typiques pour différentes valeurs des paramètres.
2. Soit $\mathcal{D}$ le disque
$$\{(x,y)\colon x^2 + y^2 \leqslant a\} \;.$$
Pour $x_0 = y_0 = 0$, soit
$$\tau = \inf\{t > 0 \colon (x_t, y_t) \notin \mathcal{D}\}$$
le temps de première sortie de $\mathcal{D}$. Soit φ_τ l'angle tel que $(x_\tau, y_\tau) = \sqrt{a}(\cos\varphi_\tau, \sin\varphi_\tau)$. Etudier numériquement les lois de τ et de φ_τ en fonction de Ω, pour des valeurs fixées de a et σ (par exemple 0.1).

Sujet 2

Soit l'EDS

$$\mathrm{d}x_t = \left[x_t - x_t^3 + A\cos(\Omega t)\right] \mathrm{d}t + \sigma \,\mathrm{d}W_t \;,$$

où A, Ω, σ sont des paramètres positifs.

1. Ecrire un programme permettant de simuler des trajectoires de cette équation. Représenter quelques trajectoires typiques pour différentes valeurs des paramètres.
2. Pour $x_0 = 1$, soit
$$\tau = \inf\{t > 0 \colon x_t = 0\}$$
la variable aléatoire donnant le temps de premier passage en 0, après que le processus ait quitté un voisinage de l'origine. Déterminer numériquement la loi de τ en fonction de Ω, pour des valeurs fixées de A et σ (par exemple 0.1).
3. On pose $\tau_1 = 1$ et on définit une suite de temps de passage successifs en 0 par
$$\tau_{n+1} = \inf\{t > \tau_n \colon x_t = 0, \exists s \in]\tau_n, t[\colon |x_s| > 0.1\} \;.$$
Etudier, pour une trajectoire, la statistique des intervalles de temps $\tau_{n+1} - \tau_n$ lorsque Ω augmente, pour des valeurs fixées de A et σ.

Sujet 3

Soit l'EDS

$$\mathrm{d}x_t = \left[x_t - (1 + A\cos(\Omega t))x_t^3\right] \mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}W_t\;,$$

où A, Ω, σ sont des paramètres positifs.

1. Ecrire un programme permettant de simuler des trajectoires de cette équation. Représenter quelques trajectoires typiques pour différentes valeurs des paramètres.
2. Pour $x_0 = 1$, soit
$$\tau = \inf\{t > 0 \colon x_t = 0\}$$
la variable aléatoire donnant le temps de premier passage en 0, après que le processus ait quitté un voisinage de l'origine. Déterminer numériquement la loi de τ en fonction de Ω, pour des valeurs fixées de A et σ (par exemple 0.1).
3. On pose $\tau_1 = 1$ et on définit une suite de temps de passage successifs en 0 par
$$\tau_{n+1} = \inf\{t > \tau_n \colon x_t = 0, \exists s \in]\tau_n, t[\colon |x_s| > 0.1\}\;.$$
Etudier, pour une trajectoire, la statistique des intervalles de temps $\tau_{n+1} - \tau_n$ lorsque Ω augmente, pour des valeurs fixées de A et σ.

Sujet 4

Soit l'EDS

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}x_t &= y_t\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}W_t\;,\\
\mathrm{d}y_t &= \left[x_t - x_t^2 - a y_t\right] \mathrm{d}t\;,
\end{aligned}$$

où a, σ sont des paramètres positifs.

1. Ecrire un programme permettant de simuler des trajectoires de cette équation. Représenter quelques trajectoires typiques pour différentes valeurs des paramètres.
2. Soit $\mathcal{D}$ le domaine
$$\{(x,y) \colon 0 \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}, y^2 \leqslant x^2 - \frac{2}{3}x^3\}\;.$$
Pour $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, soit
$$\tau = \inf\{t > 0 \colon (x_t, y_t) \notin \mathcal{D}\}$$
le temps de première sortie de $\mathcal{D}$. Etudier numériquement les lois de τ et de x_τ en fonction de a, pour une valeur fixée de σ (par exemple 0.1).