TD Master 2 – Processus aléatoires

Série 2 – Processus de Poisson

Exercice 1: Simulation d'un processus de Poisson

Soit U une variable aléatoire uniforme sur $[0,1]$, c'est-à-dire de densité $1_{[0,1]}$.

1. Donner la fonction de répartition de U.
2. Soit $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction admettant une réciproque φ^{-1}. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $Y = \varphi(U)$.
3. Déterminer φ de telle manière que Y soit exponentielle de paramètre λ.
4. En déduire une méthode pour simuler un processus ponctuel de Poisson à partir d'une suite de variables i.i.d. uniformes.

Exercice 2

Des clients arrivent dans une banque suivant un processus de Poisson d'intensité λ. Sachant que deux clients sont arrivés dans la première heure, quelle est la probabilité que

1. les deux soient arrivés dans les 20 premières minutes?
2. l'un au moins soit arrivé dans les 20 premières minutes?

Exercice 3

L'écoulement des voitures le long d'une route est modélisé par un processus de Poisson d'intensité $\lambda = 2$ voitures par minute. A cause d'un chantier, le traffic est arrêté alternativement dans chaque direction. On admet qu'à l'arrêt, chaque véhicule occupe une longueur de 8 mètres en moyenne.

1. Quelle est la loi du temps d'arrivée X_n de la $n$ième voiture?
2. A l'aide du théorème de la limite centrale, donner une approximation gaussienne de la loi de X_n.
3. Pendant combien de temps peut-on arrêter le traffic si l'on désire que la queue ainsi formée ne dépasse la longueur de 250m qu'avec une probabilité de 0.2? (La valeur de x pour laquelle $\mathbb{P}\{\mathcal{N}(0,1) < x\} = 0.2$ est $x \simeq -0.85$).

Exercice 4

Soient $(X_n)_n$ et $(Y_n)_n$ deux processus de Poisson indépendants, d'intensités respectives λ et μ. Soit $(Z_n)n$ le processus obtenu en superposant $(X_n)_n$ et $(Y_n)_n$. Montrer qu'il s'agit encore d'un processus de Poisson et donner son intensité.

Exercice 5: Le paradoxe de l'autobus

Les temps d'arrivée d'autobus à un arrêt sont décrits par un processus de Poisson $(X_n)_n$ d'intensité λ. Un client arrive à l'instant t après le début du service.

1. Calculer la probabilité que le client rate le $n$ième bus mais attrape le $(n+1)$ième bus.
2. Calculer la probabilité qu'il rate le $n$ième bus et doive attendre le $(n+1)$ième bus pendant un temps s au moins.
3. Calculer la probabilité qu'il doive attendre le bus suivant pendant un temps s au moins.
4. En déduire le temps d'attente moyen, et comparer ce temps avec le temps de passage moyen entre bus. Qu'en pensez-vous?