TD Master 2 – Processus aléatoires

Série 3 – Vitesse de convergence, chaînes de Markov à espace continu

Exercice 1

Pour $x \in \mathbb{N}$, on dénote par

$$\lfloor x \rfloor = \max\{y \in \mathbb{N} : y \leqslant x\}$$

la partie entière de x.

Soit $p \in [0,1]$. On considère la chaîne de Markov sur $\mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}$ de probabilités de transition

$$p_{xy} = \begin{cases} p & \text{si } y = x+1 \,, \\ 1-p & \text{si } y = \lfloor x/2 \rfloor \,, \\ 0 & \text{sinon} \,. \end{cases}$$

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $V(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}$.

1. Pour quelles valeurs de α la fonction V est-elle une fonction de Lyapounov ? On dira que ces valeurs de α sont *admissibles*.
2. Calculer $(\mathscr{L}V)(x)$, où $\mathscr{L}$ est le générateur de la chaîne de Markov. On distinguera les cas x pair et x impair.
3. Pour quels p la chaîne est-elle à croissance sous-exponentielle ?
4. Déterminer une fonction $f_p(\alpha)$ telle que
$$(\mathscr{L}V)(x) \leqslant -f_p(\alpha)V(x)$$
pour tout $x \in \mathbb{N}^* = \{1,2,\dots\}$.
5. Étudier la fonction $\alpha \mapsto f_p(\alpha)$ pour les valeurs de α admissibles : comportement aux bords du domaine, croissance/décroissance, convexité.
6. Pour quelles valeurs de p existe-t-il un α admissible tel que $f_p(\alpha) > 0$?
7. Pour quelles valeurs de p peut-on affirmer l'existence d'une unique mesure invariante π telle que la loi de X_n converge exponentiellement vite vers π ?

Exercice 2

On considère la chaîne de Markov sur $\mathbb{R}$ donnée par

$$X_{n+1} = aX_n + Y_{n+1}$$

avec $a \in [0,\infty[$, les Y_n étant indépendantes, identiquement distribuées, de loi uniforme sur $[-\delta,\delta]$ pour un $\delta > 0$.

1. Donner les probabilités de transition $p(x,y)$ de la chaîne.
2. Soit la fonction de Lyapounov $V(x) = x^2$. Calculer $(\mathscr{L}V)(x)$.
3. Pour quelles valeurs de a la chaîne est-elle à croissance sous-exponentielle ?
4. À l'aide de la formule de Dynkin, calculer la variance de X_n lorsque $a = 1$.
5. Pour quelles valeurs de a la chaîne satisfait-elle une condition de dérive géométrique ? Quels en sont les paramètres ?
6. Lorsque la condition de dérive géométrique est satisfaite, trouver $\alpha \in]0,1[$ et une mesure ν tels que la condition de minoration soit satisfaite. Que peut-on en déduire ?

Exercice 3

On considère la chaîne de Markov sur $\mathbb{R}$ donnée par

$$X_{n+1} = aX_n + Y_{n+1}$$

avec $a \in [0, \infty[$, les Y_n étant indépendantes, identiquement distribuées, de loi de Cauchy de paramètre $c > 0$.

Soit la fonction de Lyapounov $V(x) = |x|^\beta$. Pour quelles valeurs de $\beta > 0$ la quantité $(\mathscr{L}V)(x)$ est-elle finie ?

Exercice 4

On considère la chaîne de Markov sur $\mathbb{R}_+ = [0, \infty[$ donnée par

$$X_{n+1} = aX_n + Y_{n+1}$$

avec $a \in [0, \infty[$, les Y_n étant indépendantes, identiquement distribuées, de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. Donner les probabilités de transition $p(x, y)$ de la chaîne.
2. Calculer
$$\int_0^\infty x^k \, \mathrm{e}^{-\lambda x} \, \mathrm{d}x$$
pour $k \in \{0, 1\}$.
3. Soit la fonction de Lyapounov $V(x) = x$. Calculer $(\mathscr{L}V)(x)$.
4. Pour quelles valeurs de a la chaîne est-elle à croissance sous-exponentielle ?
5. À l'aide de la formule de Dynkin, calculer l'espérance de X_n lorsque $a = 1$. Que se passe-t-il lorsque $n \to \infty$?
6. Pour quelles valeurs de a la chaîne satisfait-elle une condition de dérive géométrique ? Quels en sont les paramètres ?
7. Lorsque la condition de dérive géométrique est satisfaite, trouver $\alpha \in]0, 1[$ et une mesure ν tels que la condition de minoration soit satisfaite. Que peut-on en déduire ?