TP Master 2 – Processus aléatoires

TP 4 – Chaînes de Markov sur $\mathbb{R}$

Selon votre préférence, vous pouvez coder ce TP en `C` ou en `Python`.

1. **Algorithme de Box–Müller**

   On rappelle que

   - si U est un variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$, alors $Y = -\log(1-U)/\lambda$ suit une loi exponentielle de paramètre λ;
   - si Y et V sont deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives exponentielle de paramètre $1/2$ et uniforme sur $[0,1]$, alors

     $$\begin{aligned} X &= \sqrt{U}\cos(2\pi V) \ , \\ Y &= \sqrt{U}\sin(2\pi V) \end{aligned}$$

     sont indépendantes de même loi $\mathscr{N}(0,1)$.

   Écrire une fonction qui retourne une variable (pseudo-)aléatoire de loi normale standard.

2. **Modèles AR(1)**

   On considère le modèle auto-régressif de temps de mémoire 1, donné par

   $$X_{n+1} = aX_n + \sigma Y_{n+1} \ ,$$

   où $0 < a < 1$ et les Y_n sont i.i.d. de loi $\mathscr{N}(0,1)$.

   (a) Écrire et tester une fonction générant une suite $(X_0 = x, X_1, \dots, X_T)$ de variables aléatoires suivant ce modèle.

   (b) Écrire une fonction qui calcule l'espérance et la variance empirique d'une suite de variables aléatoires.

   (c) Estimer numériquement l'espérance et la variance de la suite $(X_{T_1}, \dots, X_{T_2})$ pour des valeurs assez élevées de $T_1 < T_2$. Comparer aux prédictions théoriques.

3. **Système métastable**

   On considère le modèle donné par

   $$X_{n+1} = \operatorname{sign}(X_n)\sqrt{|X_n|} + \sigma Y_{n+1} \ ,$$

   où les Y_n sont i.i.d. de loi $\mathscr{N}(0,1)$.

   (a) Écrire et tester une fonction générant une suite $(X_0 = x, X_1, \dots, X_T)$ de variables aléatoires suivant ce modèle.

   (b) Étudier l'influence du paramètre σ sur lévolution de X_n.