TP Master 2 – Processus aléatoires

TP 3 – Le modèle d'Ising en dimension 2

Selon votre préférence, vous pouvez coder ce TP en `C` ou en `Python`.

1. **Énergie d'une configuration**

   On considère le modèle d'Ising sur l'ensemble $\Lambda = \{0, 1, \ldots, N-1\}^2$, muni de conditions aux bords périodiques. On rappelle qu'une configuration de ce modèle est un élément $x = (x_i)_{i\in\Lambda}$ de $\mathscr{X} = \{-1, 1\}^\Lambda$. Son énergie est

   $$H(x) = -\sum_{i,j\in\Lambda, i\sim j} x_i x_j - h \sum_{i,j=0}^{N-1} x_i \ ,$$

   où $i \sim j$ si et seulement si j est voisin de i sur le tore : soit $i_2 - i_1 = \pm 1 \pmod N$ et $j_2 = j_1$, soit $j_2 - j_1 = \pm 1 \pmod N$ et $i_2 = i_1$. D'autre part, $h \in \mathbb{R}$ est un paramètre appelé champ magnétique. On remarquera que pour chaque $i \in \Lambda$, il existe exactement 4 points $j \in \Lambda$ tels que $j \sim i$.

   - Écrire une fonction qui prend en argument un couple $i = (i_1, i_2)$ et retourne les coordonnées des 4 voisins de i sur le tore.
   - Écrire une fonction prenant en argument une configuration et le champ magnétique, et qui retourne l'énergie de cette configuration.

2. **Dynamique de Glauber**

   La dynamique de Glauber à température inverse $\beta > 0$ a été définie dans le TP2.

   (a) Donner une expression simple de $H(x') - H(x)$ lorsque x' est obtenue en changeant le signe du $i$ème spin de x.

   (b) Écrire une fonction prenant en argument une configuration x et la position $i = (i_1, i_2)$ d'un spin, et qui retourne $H(x') - H(x)$ lorsque x' est obtenue en changeant le signe du spin en position i de x.

   (c) Simuler quelques trajectoires de la chaîne de Markov, pour un N fixé (par exemple $N = 10$) et différentes valeurs de paramètres h et β.

3. **Évolution de quelques observables**

   (a) Écrire une fonction qui, à partir d'une configuration initiale $x(0)$ et un temps T, imprime $H(x(n))$ pour $n = 0, \ldots, T$. Tester cette fonction pour différentes valeurs des paramètres.

   (b) Écrire une fonction qui calcule l'aimantation $m(x) = \sum_{i\in\Lambda} x_i$ d'une configuration x.

   (c) Écrire une fonction qui, à partir d'une configuration initiale $x(0)$ et un temps T, imprime $m(x(n))$ pour $n = 0, \ldots, T$. Tester cette fonction pour différentes valeurs des paramètres.

   (d) Comparer cette évolution à celle de sa moyenne ergodique (ou de Cesaro).