TP Master 2 – Processus aléatoires

TP 2 – Le modèle d'Ising en dimension 1

Selon votre préférence, vous pouvez coder ce TP en `C` ou en `Python`.

1. **Énergie d'une configuration**

   On considère le modèle d'Ising sur l'ensemble $\Lambda = \{0, 1, \dots, N-1\}$. On rappelle qu'une configuration de ce modèle est un élément $x = (x_0, \dots, x_{N-1})$ de $\mathscr{X} = \{-1, 1\}^\Lambda$. Son énergie est

   $$H(x) = -\sum_{i=0}^{N-2} x_i x_{i+1} - h \sum_{i=0}^{N-1} x_i ,$$

   où $h \in \mathbb{R}$ est un paramètre appelé champ magnétique.

   Écrire une fonction prenant en argument une configuration et le champ magnétique, et qui retourne l'énergie de cette configuration.

2. **Dynamique de Glauber**

   On rappelle que la dynamique de Glauber à température inverse $\beta > 0$ est définie comme suit.

   - Les seules transitions permises sont celles qui changent le signe d'un seul spin : x' peut être atteint en un pas depuis x si, et seulement si, il existe $i \in \Lambda$ tel que $x'_i = -x_i$ et $x'_j = x_j$ pour $j \neq i$.
   - La probabilité d'une transition permise est

   $$p_{xx'} = \begin{cases} \frac{1}{N} & \text{si } H(x') \leqslant H(x) , \\ \frac{1}{N} \, \mathrm{e}^{-\beta[H(x') - H(x)]} & \text{sinon .} \end{cases}$$

   (a) Donner une expression simple de $H(x') - H(x)$ lorsque x' est obtenue en changeant le signe du $i$ème spin de x.

   (b) Écrire une fonction prenant en argument une configuration x et l'indice i d'un spin, et qui retourne $H(x') - H(x)$ lorsque x' est obtenue en changeant le signe du $i$ème spin de x.

   (c) Simuler quelques trajectoires de la chaîne de Markov, pour un N fixé (par exemple $N = 10$) et différentes valeurs de paramètres h et β. On pourra représenter l'évolution au cours du temps en imprimant une configuration par ligne.

3. **Évolution de quelques observables**

   (a) Écrire une fonction qui, à partir d'une configuration initiale $x(0)$ et un temps T, imprime $H(x(n))$ pour $n = 0, \dots, T$. Tester cette fonction pour différentes valeurs des paramètres.

   (b) Écrire une fonction qui calcule l'aimantation $m(x) = \sum_{i=0}^{N-1} x_i$ d'une configuration x.

   (c) Écrire une fonction qui, à partir d'une configuration initiale $x(0)$ et un temps T, imprime $m(x(n))$ pour $n = 0, \dots, T$. Tester cette fonction pour différentes valeurs des paramètres.

   (d) Comparer cette évolution à celle de sa moyenne ergodique (ou de Cesaro).