TP Master 2 – Processus aléatoires

TP 1 – Le modèle d'Ehrenfest

Selon votre préférence, vous pouvez coder ce TP en `C` ou en `Python`. Quelques indications sont données pour le code en `C`.

1. **Génération de variables aléatoires**

   (a) Écrire une fonction à un argument, un double (nombre à virgule flottante en double précision) p, retournant une variable aléatoire de loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$.

   (b) Écrire une fonction à deux arguments, un entier n et un double p, retournant une variable aléatoire de loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$.

   Indication : En `C`, la commande `rand()` retourne un entier entre 0 et `RAND_MAX`.

2. **Trajectoires du modèle d'Ehrenfest**

   (a) Écrire une fonction à trois arguments entiers N, T et x_0, qui génère et affiche (par exemple en imprimant dans le terminal) une trajectoire du modèle d'Ehrenfest à N boules, d'état initial x_0 et de longeur T.

   On rappelle que les probabilités de transition de l'état x vers les états $x+1$ et $x-1$ valent respectivement x/N et $1-x/N$.

   (b) Simuler quelques trajectoires pour des valeurs de N assez grandes (100 par exemple), avec état initial $x_0 = 0$. Qu'observez-vous ?

3. **Distributions empiriques**

   (a) Écrire une fonction à trois arguments entiers N, T et x_0, qui retourne un tableau de doubles de taille $N+1$, donnant la distribution empirique d'une trajectoire du modèle d'Ehrenfest à N boules, d'état initial x_0 et de longeur T.

   En d'autres termes, on veut calculer

   $$p_T(x) = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} 1_{\{X_t = x\}}$$

   (b) Écrire deux fonctions calculant l'espérance et la variance d'une distribution de probabilité sur l'ensemble $\{0, \dots, N\}$.

   (c) Utiliser cette fonction pour calculer l'espérance et la variance de quelques distributions empiriques de trajectoires.

4. **Convergence en variation totale**

   (a) Écrire une fonction calculant la distance de la variation totale entre deux distributions de probabilité sur l'ensemble $\{0, \dots, N\}$.

   (b) Utiliser cette fonction pour calculer la distance en variation totale entre la distribution empirique et une loi binomiale $\mathscr{B}(N, 1/2)$.

   Il pourra être utile de trouver un moyen de calculer par récurrence p_{T+1} en fonction de p_T.

   (c) Étudier sur quelques exemples le comportement de cette distance en fonction de T.

Voici un embyon de code `C` qui peut être utile.

```
#include <math.h>
#include <string.h>
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <sys/types.h>

int main(int argc, char** argv)
{
    int i;

    for (i=0; i<20; i++)
        printf("%i\n", i);
    return(0);
}
```

Si vous avez l'habitude d'utiliser `makefile`, vous pouvez utiliser

```
 LIBS = -L/usr/X11R6/lib -lm -lX11


.c:
        gcc -o $@ $< -O3 $(LIBS)
```