TD Master 2 – Processus aléatoires

Série 3 – Chaînes de Markov à espace continu

Exercice 1

On considère la chaîne de Markov sur $\mathbb{R}$ donnée par

$$X_{n+1} = aX_n + Y_{n+1}$$

avec $a \in [0, \infty[$, les Y_n étant indépendantes, identiquement distribuées, de loi uniforme sur $[-\delta, \delta]$ pour un $\delta > 0$.

1. Donner les probabilités de transition $p(x, y)$ de la chaîne.
2. Soit la fonction de Lyapounov $V(x) = x^2$. Calculer $(\mathscr{L}V)(x)$.
3. Pour quelles valeurs de a la chaîne est-elle à croissance sous-exponentielle ?
4. À l'aide de la formule de Dynkin, calculer la variance de X_n lorsque $a = 1$.
5. Pour quelles valeurs de a la chaîne satisfait-elle une condition de dérive géométrique ? Quels en sont les paramètres ?
6. Lorsque la condition de dérive géométrique est satisfaite, trouver $\alpha \in]0, 1[$ et une mesure ν tels que la condition de minoration soit satisfaite. Que peut-on en déduire ?

Exercice 2

On considère la chaîne de Markov sur $\mathbb{R}$ donnée par

$$X_{n+1} = aX_n + Y_{n+1}$$

avec $a \in [0, \infty[$, les Y_n étant indépendantes, identiquement distribuées, de loi de Cauchy de paramètre $c > 0$.

Soit la fonction de Lyapounov $V(x) = |x|^\beta$. Pour quelles valeurs de $\beta > 0$ la quantité $(\mathscr{L}V)(x)$ est-elle finie ?