TD Master 2 – Processus aléatoires

Série 2 – Trou spectral, fonctions de Lyapounov

Exercice 1

On considère la marche aléatoire symétrique sur le cercle discret à N sites :

$$p_{xy} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } y = x+1 \;, \\ \frac{1}{2} & \text{si } y = x-1 \;, \\ 0 & \text{sinon} \;, \end{cases}$$

avec l'identification modulo N : $N+1 = 1$, $0 = N$.

1. Quelle est la matrice de transition de cette chaîne de Markov ?
2. Par un argument de symétrie, trouver la probabilité invariante de la chaîne.
3. Soit $\omega = \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}/N}$. Montrer que pour tout $k \in \{0, \dots, N-1\}$, le vecteur v_k de composantes
$$v_{k,x} = \omega^{k(x-1)} \;, \qquad x \in \{1, \dots, N\}$$
est un vecteur propre de P. En déduire les valeurs propres de P.
4. Déterminer le trou spectral λ_0 de P (sa valeur propre différente de 1 de plus grand module). Distinguer les cas N pair et N impair.
5. Par un développement limité, déterminer $1 - \lambda_0$ à l'ordre dominant en N.

Exercice 2

Soit $p \in]0,1[$ et $q = 1-p$. On considère la marche aléatoire asymétrique sur le cercle discret à N sites :

$$p_{xy} = \begin{cases} p & \text{si } y = x+1 \;, \\ q & \text{si } y = x-1 \;, \\ 0 & \text{sinon} \;, \end{cases}$$

Par la même méthode qu'à l'exercice précédent, déterminer, en fonction de p, le trou spectral λ_0 de P, ainsi que $1 - \lambda_0$ à l'ordre dominant en N.

Exercice 3

On considère la marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$.

1. Calculer $(LV)(x)$ pour la fonction de Lyapounov $V(x) = x^2$. Interpréter le résultat.
2. Calculer $(LV)(x)$ pour la fonction de Lyapounov $V(x) = |x|$. Que peut-on en déduire ?
3. Que se passe-t-il pour la marche aléatoire asymétrique ?

Exercice 4

Soit $p \in]0,1[$ et $q = 1-p$. On considère la marche aléatoire sur $\mathbb{N}$ de probabilités de transition

$$p_{xy} = \begin{cases} p & \text{si } y = x+1 \;, \\ q & \text{si } y = 0 \;, \\ 0 & \text{sinon} \;. \end{cases}$$

Calculer $(LV)(x)$ pour la fonction de Lyapounov $V(x) = |x|$. Que peut-on en déduire ?